

第 I 部分是选择题(共45分, 答案唯一), 第 I I 部分是简答题(共55分), 只把主要步骤写在答题纸上

** 若有需要 取重力加速度 $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$ 及 重力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ (若没有特别注明 取所有摩擦力为零)**

第 I 部分 选择题 (15×3 分)

1. 地面上的一门火炮可以以 50.0 m/s 的速度发射炮弹, 角度任意。一架无人机正在离地面 100 米 的恒定高度飞行。问在火炮水平距离多远以外的地方, 火炮无法击落无人机?

- A. 119 m B. 123 m C. 136 m D. 141 m E. 157 m

2. 一个声源和一个听者正向着彼此移动。声源的速率为 30.0 m/s , 听者的速率为 20.0 m/s 。同时, 有一股速率 10.0 m/s 的强风从听者吹向声源方向。如果声源发出频率为 440 Hz 的声音波, 那么听者测得的频率是多少? 取空气中声音的速度为 340 m/s 。

- A. 507 Hz B. 509 Hz C. 511 Hz D. 513 Hz E. 515 Hz

3. 香港的纬度为北纬 22.3° 。假设地球是一个完美球体, 半径为 6400 公里 , 并且自转周期正好是 24 小时 。一个质量为 1.00 公斤 的物体静止在地面上 (即与地球一起旋转)。地面施加于该物体上的摩擦力有多大?

- A. 0.0036 N B. 0.0058 N C. 0.0074 N D. 0.0093 N E. 0.012 N

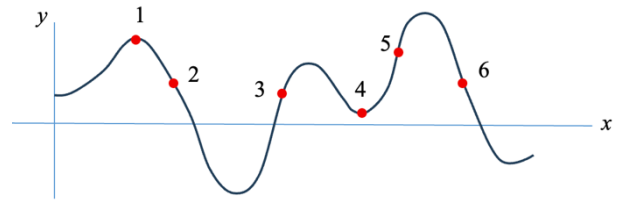
4. 一个质量为 0.10 公斤 的粒子连接到弹簧常数 $k = 10 \text{ N/m}$ 的弹簧上, 在 x 轴上做简谐运动, 平衡位置在 $x = 0$ 。当 $t = 0$ 时, 该粒子位于 $x_0 = -0.40 \text{ m}$ 处, 并以速度 $v_0 = 3.0 \text{ m/s}$ 移动。求其在 $t = 2.0 \text{ s}$ 时的位置。

- A. -0.27 m B. -0.11 m C. 0.11 m D. 0.25 m E. 0.27 m

5. 一个 1.00 公斤 的物体和一个 2.00 公斤 的物体分别连接在弹簧的两端, 弹簧的弹性系数 k 为 20.0 N/m 。弹簧初始时处于自然长度, 两物体以大小同为 3.00 m/s 的初速率朝彼此远离的方向运动。求弹簧的最大伸长量。

- A. 0.875 m B. 1.10 m C. 1.12 m D. 1.14 m E. 1.16 m

6. 一条绳子上的横波向右移动。下图显示了在特定时间 t 下 $y(x, t)$ 与坐标 x 的关系, 表示那时绳子一部分的波形。点 1 是局部最大值, 点 4 是局部最小值。在这个时刻, 绳子上哪些标示的粒子的瞬时速度为向上?



- A. 只 1 和 4 B. 只 2 和 6 C. 只 3 和 5
D. 只 1, 3 和 5 E. 只 2, 4 和 6

7. 在 xy 平面上移动的物体受到的力为 $\vec{F}(x, y) = Cy\hat{i}$, 其中 C 是一个常数, \hat{i} 为 x 方向的单位向量。考虑一个边长为 L 的正方形路径, 四个角分别位于 $(0, 0)$ 、 $(L, 0)$ 、 $(0, L)$ 和 (L, L) 。物体从原点开始, 沿着正方形路径移动, 依次到达角点 $(0, 0) \rightarrow (L, 0) \rightarrow (L, L) \rightarrow (0, L) \rightarrow (0, 0)$ 。求该力所做的功。

- A. CL^2 B. $-CL^2$ C. 0 D. $2CL^2$ E. $-2CL^2$

问题 8 和 9

一个质量为 m 内置弹簧的发射物在 $t = 0$ 时以速率 u 被发射, 发射角与水平方向成 45° 。该物体本该在 $t = T$ 时再次落地。然而, 在 $t = T/4$ 时, 弹簧释放, 物体分裂成两个相等质量的部分, 其中一部分将沿着相同的轨迹向后移动, 撞击发射器。

8. 弹簧释放的能量是多少?

- A. $\frac{1}{4}mu^2$ B. $\frac{1}{2}mu^2$ C. $\frac{3}{4}mu^2$ D. mu^2 E. $\frac{5}{4}mu^2$

9. 当发射器被击中时, 两部分之间的距离是多少?

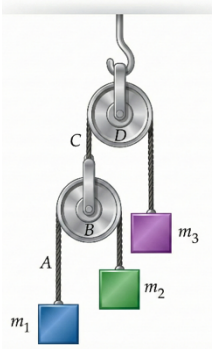
- A. $\frac{1}{2} \frac{u^2}{g}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u^2}{g}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{u^2}{g}$ D. $\frac{u^2}{g}$ E. $\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{u^2}{g}$

10. 一个质量为 M 、半径为 R 、围绕其中心轴以角速度 ω_0 旋转的实心圆柱体被放置在一个动摩擦系数为 μ_k 的水平面上。圆柱体的初始线速度为零。计算圆柱体从放置的位置移动到开始无滑动滚动的位置之间的距离。

- A. $\frac{\omega_0^2 R^2}{12\mu_k g}$ B. $\frac{\omega_0^2 R^2}{14\mu_k g}$ C. $\frac{\omega_0^2 R^2}{16\mu_k g}$ D. $\frac{\omega_0^2 R^2}{18\mu_k g}$ E. $\frac{\omega_0^2 R^2}{20\mu_k g}$

11. (此题中之数字皆为精确值) 在下图中, 质量 m_1 和 m_2 通过一根轻绳 A 连接在一个轻的无摩擦滑轮 B 上。滑轮 B 的轴通过第二根轻绳 C 经过第二个轻的无摩擦滑轮 D 连接到质量 m_3 。滑轮 D 以一个连接件固定悬挂在天花板上。系统从静止释放。如果 $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_3 = 3$, 则 m_1 的加速度是多少? 取向上为正。

- A. $\frac{2}{9}g$ B. $\frac{1}{3}g$ C. $\frac{7}{17}g$ D. $\frac{5}{12}g$ E. $\frac{6}{13}g$

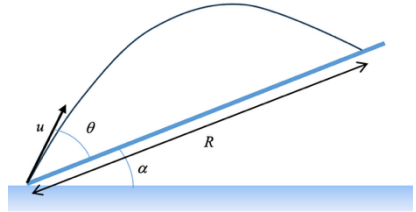


问题 12 和 13

一个物体在倾斜面上以速率 u 被发射, 发射角度从沿着倾斜面向上方向测量为 θ , 如下图所示。倾斜面的倾角为 α , 其中 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 且 $0^\circ < \theta < 90^\circ - \alpha$ 。该物体将在倾斜面上距离为 R 的位置碰撞倾斜面。

12. 如果 α 固定但 θ 可变, 找到 R 的最大值。

- A. $\frac{u^2}{g}$ B. $\frac{u^2}{g}(1 - \sin \alpha)$ C. $\frac{u^2}{g \cos \alpha}(1 - \sin \alpha)$
 D. $\frac{u^2}{g \cos^2 \alpha}(1 - \sin \alpha)$ E. $\frac{u^2}{g \cos \alpha}$

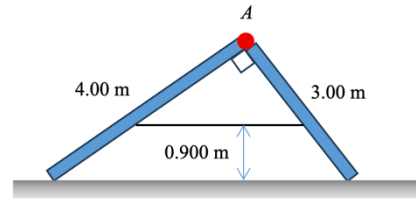


13. 如果 $\alpha = 20^\circ$, 则 θ 为何值时 R 最大?

- A. 10° B. 25° C. 35° D. 40° E. 45°

14. 两架梯子, 分别长 4.00 米和 3.00 米, 在 A 点铰接, 并通过一根距地面 0.900 米的水平绳子绑在一起, 如下图所示。这两架梯子的重量分别为 480 N 和 360 N, 且每架梯子的质心位于其中点。假设地面是平滑的。如果一个重 800 N 的油漆工站在 A 点, 求水平绳子的张力。

- A. 937 N B. 1010 N C. 1160 N
 D. 1250 N E. 1380 N



15. 一名宇航员在宇宙飞船内正在以距黑洞中心 120 公里的圆形轨道绕黑洞飞行。该黑洞的质量为太阳质量的 5.00 倍 (太阳质量 = $2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$), 其史瓦西半径为 15.0 公里。由于轨道半径远大于史瓦西半径, 可以假设牛顿引力定律成立。宇航员的一只质量为 0.030 kg 的耳朵距离黑洞比飞船的质心远 6.0 cm, 而另一只耳朵则近 6.0 cm。她耳朵之间的张力是多少? (由于她的整个身体以相同的角速度绕黑洞旋转, 一只耳朵的运动速率对于其轨道半径来说太慢, 而另一只耳朵的运动速率则太快。因此, 她的头必须对她的耳朵施加力以保持它们在各自的轨道上。)

- A. 700 N B. 1400 N C. 2100 N D. 2800 N E. 3500 N

第 II 部分 简答题 (55 分)

16. [30 分] 在本题中可能会用到:

(1) 当 θ 为小角度时, $\cos \theta \approx \sec \theta \approx 1$ 和 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$

(2) 直角三角形的形心位置如图 1-1 所示。

考虑一个边长为 L 的空心立方体箱子。箱子的边面厚度可以忽略不计, 且具有均匀的质量密度, 每单位面积的质量为 σ 。现在, 箱子的顶面被去掉, 箱子底面朝下放入一液体中 (液体的每单位体积质量为 ρ)。注意: 我们假设流体是理想的, 处于静态平衡中, 因此流体惯性和粘度等动态效应可以忽略。唯一的流体力为静浮力。

(a). [1] 找到边面的临界表面质量密度 σ_c , 超过这个值箱子将完全浸入流体中。用 ρ 和 L 表达你的答案。

以下均假设 $\sigma < \sigma_c$ 。

(b). [1] 箱子在流体表面下方的高度 h 是多少? 用 σ 和 ρ 表达你的答案。

(c). [3] 箱子在其平衡位置的小幅垂直振荡的频率是多少? 用 ρ 、 σ 和引力加速度 g 表达你的答案。

现在箱子绕一水平轴倾斜了一个角度 θ , 该轴通过其质心, 并且垂直于两个悬直边面, 见图 1-2。

(d) [6] 找到箱子对于上述转轴之转动惯量。用 σ 和 L 表达你的答案。

当底面中心距离流体表面的深度为 h 时, 作用于箱子的净外力为零。

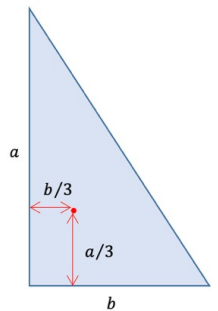


图1-1

(e) [3] 找到 h 以及箱子质心在表面下方的深度。用 σ, ρ 和 θ 表达你的答案。并分别写出当 θ 为小角度时的表达式。

(f) [6] 找到流体表面下方盒子体积的几何中心位置。用 L, h 和 θ 表达你的答案。

假设盒子初始倾斜角度很小，初始高度 h 在小角度情况下的值为 (e) 部分的值。然后盒子被释放以自由旋转。

(g) [2] 在小角度旋转时，通过仅保留到 θ 的一阶项，找出作用在盒子上的水平和垂直合力。

(h) [5] 通过仅保留到 θ 的一阶项，找到作用在盒子上的扭矩。用 σ, ρ, g, L 和 θ 表达你的答案。

(i) [1] 由 (h) 可看到盒子将作简谐角振动，找出其频率。

(j) [2] 在给定 L 的情况下，找出频率为最小的条件，并以 g 和 L 表达该最小频率。

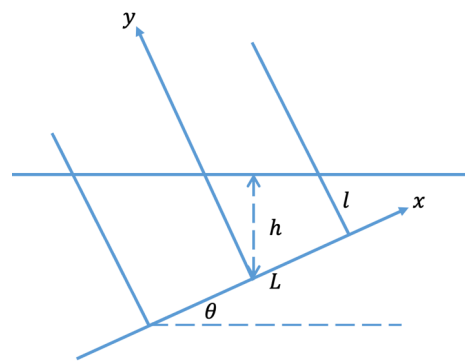


图1-2

17. [25 分] 基于 GW170817 的多信使物理

2015 年 9 月 14 日，LIGO 干涉仪首次直接探测到了由两个黑洞的旋进 (inspiral) 与并合 (merger) 产生的引力波事件。2017 年 8 月，人类首次探测到了涉及两颗中子星的双中子星并合事件 GW170817。与之前涉及黑洞的事件不同，这次并合伴随着全波段的电磁辐射，包括伽马射线短暴和光学波段的千新星 (kilonova)。

在本题中，我们将中子星建模为仅通过相互引力作用的点粒子。假设中子星始终在近似圆轨道上相互绕转。中子星的运动由随时间变化的位置矢量 $\vec{r}(t)$ 描述。位置矢量的时间导数给出的速度： $\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ 表示位置随时间的变化率。

本题旨在通过这次多信使观测来提取物理信息。你可以使用以下常数：

• 万有引力常数： $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ； 光速： $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ ； 太阳质量： $M_{\odot} = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$

(A 部分) A.1 [3] 考虑一个由质量分别为 m_1 和 m_2 的两颗中子星组成的孤立系统。相对于任意原点 O ，两颗星及其质心的位置矢量分别为 \vec{r}_1 、 \vec{r}_2 和 \vec{R} 。定义从 \vec{r}_1 指向 \vec{r}_2 的位置矢量为： $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ 。质量为 m_2 的中子星的速度矢量可以表示为： $\vec{v}_2 = \vec{\alpha} + \beta \dot{\vec{r}}$ ，请解出 $\vec{\alpha}$ 和 β ，其中 $\vec{\alpha}$ 是一个守恒矢量，且 β 可用 m_1 和 m_2 表示。

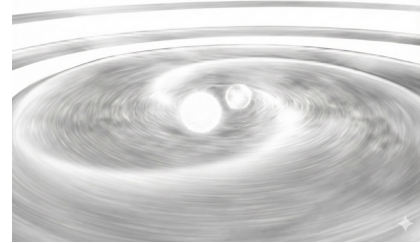
注意：对于 A.2 - A.4 部分，所有计算均应在系统质心位于原点的参考系中进行。

A.2 [3] 做圆周运动的双中子星系统的总轨道角动量可以写为： $\vec{L} = L(\mu, \Omega, R_{NS})\hat{n}$ ，其中 \hat{n} 是垂直于轨道平面并指向角动量方向的单位矢量。 R_{NS} 表示两颗中子星之间的距离， μ 是约化质量 (reduced mass)： $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ， $M = m_1 + m_2$ 是双星系统的总质量， Ω 是位置矢量 \vec{r} 的角速度。试推导 $L(\mu, \Omega, R_{NS})$ 的表达式。

A.3 [3] 同样地，做圆周运动的双中子星系统的总机械能可以写为以下形式： $E = E(\Omega, \mu, R_{NS}, M)$ 。试推导 $E(\Omega, \mu, R_{NS}, M)$ 的表达式。

A.4 [3] 对于一个等质量的中子星双星系统，若其间距为 $R_{NS} = 1200 \text{ km}$ ，且单一中子星质量为 $m = 1.4M_{\odot}$ ，试估算比值 v/c 。这里 v 表示其中一颗中子星相对于双星系统质心的速率。利用该结果评估系统是否接近牛顿极限 (即 $v/c \ll 1$)。

(B 部分) 在 A 部分使用的牛顿近似中，两颗中子星将永远保持在固定间距 R_{NS} 的圆轨道上。然而在现实中，系统会发射引力辐射，这会带走双星系统的能量，导致轨道随时间缓慢收缩。根据爱因斯坦于 1915 年提出的广义相对论，随时间变化的质量分布 (如绕转的致密天体) 会扰动时空并产生引力波，将能量和角动量带离源头。随着能量通过引力波辐射流失，双星系统的总机械能减小，迫使中子星在逐渐缩小的近似圆轨道上运动。这种逐渐向内的螺旋运动被称为“旋进” (inspiral)，该过程持续进行直到星体最终并合。GW170817 是一个里程碑式的例子。UTC 时间 2017 年 8 月 17 日 12:41:04，费米伽马射线暴监测器探测到了一个伽马射线短暴。约 1.7 秒前，LIGO 和 Virgo 干涉仪记录到了一个持续时间较长的引力波“啁啾” (chirp) 信号。该信号被确认为两颗中子星的旋进与并合。这标志着科学家首次同时观测到引力波事件及其电磁对应事件：一个高能光短暴，以及随后可被望远镜观测到的明亮余辉，称为“千新星”。



(图 2-1: 中子星旋进)

B.1 [3] 根据广义相对论的主项四极辐射公式，总质量为 M 、约化质量为 μ 、间距为 R_{NS} 的圆形轨道双星通过引力波带走能量的速

率为：

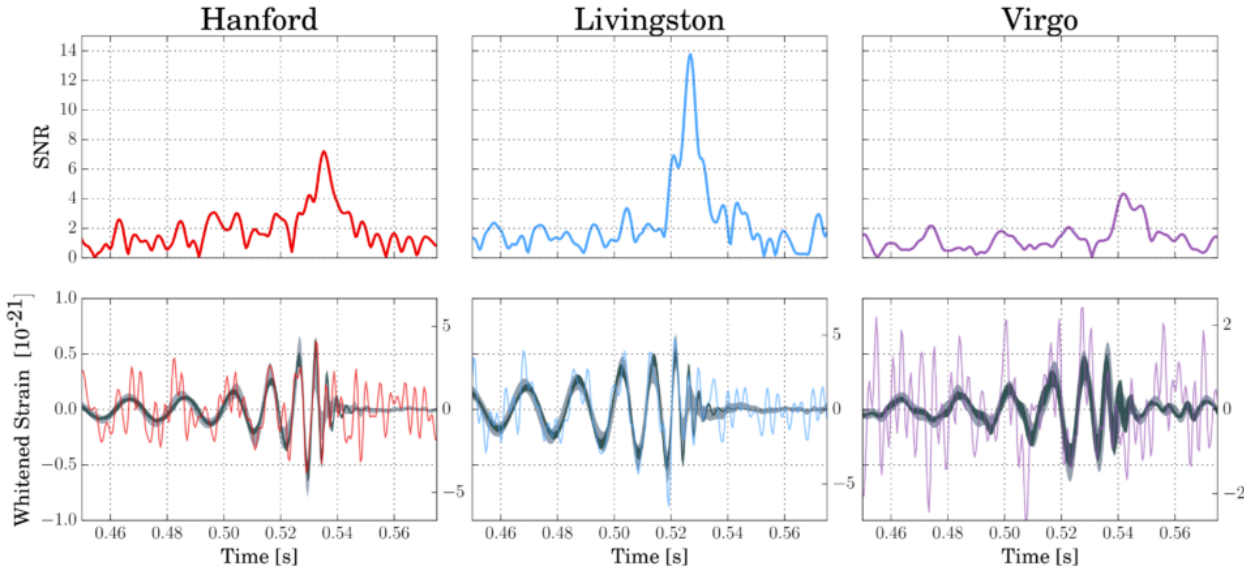
$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32 G^4 \mu^2 M^3}{5 c^5 R_{NS}^5}$$

对于总质量为 M 、约化质量为 μ 的双星系统，中子星之间距 R_{NS} 的变化率由下式给出： $\frac{dR_{NS}}{dt} = F(M, \mu, R_{NS})$ 。试求 $F(M, \mu, R_{NS})$ 的表达式。

你可以不加证明地使用以下结果：

- 微分链式法则： $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dR_{NS}} \frac{dR_{NS}}{dt}$
- 对于任意常数 a 和实数 n ： $\frac{d}{dR} (a R^n) = a n R^{n-1}$

B.2 当 LIGO 或 Virgo 探测到引力波信号时，它会记录下一个波形：一个显示波的频率和振幅随时间变化的模式。这个模式就像产生该系统的指纹。当两个致密天体螺旋靠近时，引力波起初频率和振幅均较低，随后频率升高且振幅增大。这种音调升高的信号称为“啁啾”（chirp）。图 2-2 展示了 Hanford、Livingston 和 Virgo 探测器针对某次双中子星旋进记录的引力波数据：



(图 2：双中子星并合波形图。图片来源：LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

• 第一行：这些图显示了每个探测器中引力波信号强度与背景噪声的对比值(Signal-to-Noise Ratio SNR)。三个探测器在几乎相同的时间出现了一个清晰的峰值，表明它们探测到了同一事件。

• 第二行：这些图显示了引力波强度随时间的变化。

双中子星并合产生的引力波信号周期是双星轨道周期的一半： $2T_{GW} = T_{Orbit}$ 。随着中子星相互靠近，它们绕转得更快，因此频率在接近并合时会上升。

在以下部分中，我们将把观测到的 GW170817 引力波信号与中子星双星的物理参数联系起来。在整个问题中，我们假设两颗相同的中子星在圆轨道上运动。使用牛顿数量级估算，忽略相对论效应和有限尺寸效应。

B.2 (a) [2] 利用图 2 中显示的 Livingston 探测器数据，估算信号消失前瞬间（接近并合时）的引力波频率。从数据中估算频率，并选择最接近你估算值的选项：

- (a) $f_{GW} \sim 32$ Hz (b) $f_{GW} \sim 64$ Hz (c) $f_{GW} \sim 100$ Hz (d) $f_{GW} \sim 200$ Hz (e) $f_{GW} \sim 350$ Hz

在后续所有部分中，请使用你在 (B.2a) 部分选择的引力波频率。

B.2 (b) [2] 利用该频率，估算接近并合时中子星的轨道周期。

B.2 (c) [3] 假设在接近并合时，中子星相互绕转的速率约为 $\approx 1 \times 10^8$ m/s。这大约是光速的 1/3 (!)。利用此速率估算轨道半径。

B.2 (d) [3] 对于致密双星，最内稳定圆轨道 (ISCO) 半径近似为： $R_{ISCO} \approx \frac{6GM}{c^2}$ 。该表达式严格来说仅适用于测试粒子绕黑洞的轨道。在此，我们仅将其作为中子星双星的数量级估算。假设你估算的轨道半径对应于 ISCO，利用此关系估算双星系统的总质量 M 。请用太阳质量 M_{\odot} 表示你的答案。注意：由于中子星双星并没有真正的 ISCO，且忽略了相对论和有限尺寸效应，此过程将高估系统的真实总质量。

第 I 部分 选择题 (15×3 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

第 II 部分 简答题 (55 分) 请写出主要步骤

<p>16(a) [1] $\sigma_c =$</p>	<p>(b) [1]</p>
<p>(c) [3]</p>	<p>(d) [6]</p>
<p>(e) [3] $h =$</p> <p>当 θ 为小角度时, $h =$</p>	<p>(e) 箱子质心在表面下方的深度:</p> <p>当 θ 为小角度时, 箱子质心在表面下方的深度:</p>
<p>(f) [6] 流体表面下方盒子体积的几何中心位置:</p>	
<p>(g) [2] 盒子上的水平合力:</p>	<p>(g) 盒子上的垂直合力:</p>

(h) [5] 在盒子上的扭矩:	
(i) [1] 振动频率:	(j) [2] 频率为最小的条件:

请写出主要步骤

17 A1 [3] $\alpha =$	A1 $\beta =$
A2 [3] $L(\mu, \Omega, R_{NS}) =$	A3 [3] $E(\Omega, \mu, R_{NS}, M) =$
A4 [3] $\frac{v}{c} \approx$	B1 [3] $F(M, \mu, R_{NS}) =$
B2(a) [2] 圈出正确答案 (a) $f_{GW} \sim 32$ Hz (b) $f_{GW} \sim 64$ Hz (c) $f_{GW} \sim 100$ Hz (d) $f_{GW} \sim 200$ Hz (e) $f_{GW} \sim 350$ Hz	B2(b) [2] 中子星的轨道周期:
B2(c) [3] 轨道半径:	B2(d) [3] 双星系统的总质量 M