第 14 屆泛珠三角物理奧林匹克暨中華名校邀請賽力學基礎試 (2018 年 2 月 22 日)

I. 答案

选择题 (20×2 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	B	D	E	B	D	C	A	A	F	C	A	F	F	D	C	B	E	A	C

21.(12 分)

(1)卫星的机械能 $E_0=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{r_0}$ 和角动量 $L_0=mr_0v_0\sin\theta_0$.	(2)卫星与地球中心最短距离和最长距离 $\begin{matrix} r_{max} \\ r_{min} \end{matrix}=r_0\left(\frac{GM}{2GM-r_0v_0^2}\pm\sqrt{(\frac{GM}{2GM-r_0v_0^2})^2-\frac{r_0v_0^2\sin^2\theta_0}{2GM-r_0v_0^2}}\right)$
(3)椭圆轨道半长轴 $a=\frac{GMr_0}{2GM-r_0v_0^2}$.	(4)卫星的轨道周期 $\tau=2\pi GM(\frac{r_0}{2GM-r_0v_0^2})^{3/2}$

22.(20 分)

(1)简谐振动，固有频率 $\omega^2=\frac{g}{R}$ 和周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

(2)由机械能守恒定律，最大速度 $V=\sqrt{\frac{g}{R}}L$.

(3) 铁路隧道	$s=$	$\theta=$	(i)隧道全长 $2L$	(ii)最大深度$(R-r)$	(iii)最大速度 V	(iv)所需的时间
(a)北京至广州	1,250km	5.5953^0	1,248 km	30.49 km	780 m/s	2,512 s(秒)
(b)广州至香港	150km	0.6714^0	150 km	0.439 km	93.75m/s	2,512 s(秒)

(4)由动量守恒和机械能守恒定律瞬时速度：发射卫星 $v_1=\frac{3m_2-m_1}{m_1+m_2}V$ 和重物 $v_2=\frac{3m_1-m_2}{m_1+m_2}V$.

(5)由机械能守恒定律速度 $u^2=\frac{8m_2(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}\frac{g}{R}L^2$.

(6)比值 $\frac{r}{R}=\sqrt{1-\frac{(m_1+m_2)^2}{8m_2(m_2-m_1)}}$

(7)最大深度：(i) $m_2=2m_1$, h=2,167km；(ii) $m_2=20m_1$, h=482km.

23.(12 分)

	(a) 圆柱体		(b) 圆台体	
	液体浸到 $H/3$ 高度	液体浸到 $2H/3$ 高度	正立	倒立
(1) 密度 $\frac{P}{\rho}=\frac{V}{V}=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{37}{56}$	$\frac{19}{56}$
(2) 质量 $M=\rho V=$	$\frac{1}{3}\pi R^2H\rho$	$\frac{2}{3}\pi R^2H\rho$	$\frac{37}{12}\pi R^2H\rho$	$\frac{19}{12}\pi R^2H\rho$
(3) $a+\omega^2x=0$，频率 $\omega^2=$	$\frac{3g}{H}$	$\frac{3g}{2H}$	$\frac{27g}{37H}$	$\frac{27g}{19H}$

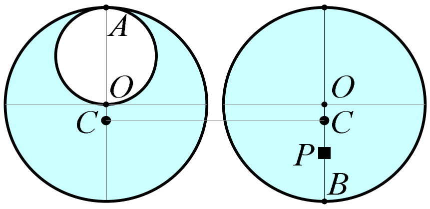
24.(16 分)

设转动惯量 $I=kMR^2$	实心球 $k=2/5$	空心薄壁球 $k=2/3$
(1) 球心 C 的速度 $v_c^2=2g(R_0+R)\frac{1-\cos\varphi}{1+k}$	$v_c^2=\frac{10}{7}g(R_0+R)(1-\cos\varphi)$	$v_c^2=\frac{6}{5}g(R_0+R)(1-\cos()$
(2) 支持力 $N=Mg\frac{(3+k)\cos\varphi-2}{1+k}$ 和 其所受静摩擦力 $f=Mg\frac{k\sin\varphi}{1+k}$.	$N=Mg\frac{17\cos\varphi-10}{7}$ $f=\frac{2}{7}Mg\sin\varphi$	$N=Mg\frac{11\cos\varphi-6}{5}$ $F=\frac{2}{5}Mg\sin\varphi$
(3) 当 $N=0$ 即临界角 $\cos\varphi_0=\frac{2}{3+k}$ 时，球滑落.	$\varphi_0=53.97^0$	$\varphi_0=56.94^0$
(4) 静摩擦系数 $\mu(\varphi)=\frac{k\sin\varphi}{(3+k)\cos\varphi-2}=\mu_{min}$	$\mu_{min}=\frac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi-10}$	$\mu_{min}=\frac{2\sin\varphi}{11\cos\varphi-6}$
(5) 球在范围 $\varphi\le30^0$ 做纯滚动 $\mu(30^0)\ge\frac{k}{(3+k)\sqrt{3}-4}=\mu_{min}$	$\mu_{min}=\frac{2}{17\sqrt{3}-20}=0.2118$	$\mu_{min}=\frac{2}{11\sqrt{3}-12}=0.2836$
(6) 角度最小值 $\varphi_{min}=0$，球将会由圆柱面顶部直接滑落 最大值 $\cos\varphi_{max}=\frac{2}{3+k}$，即球与圆柱面分离时的临界角 φ_0	$\varphi_{min}=0$ 当 $\mu=0$ $\varphi_{max}=54^0$ 当 $\mu\to\infty$	$\varphi_{min}=0$ 當 $\mu=0$ $\varphi_{max}=57^0$ 当 $\mu\to\infty$

II. 赛题和解答

1. 两个质量为 M 和半径 $OA=OB=R$ 均匀等厚度圆板：(i)在半径 OA 上挖去一个直径为 R 的圆洞；(ii)在半径 OB 中点 P 贴上一个质量为 m 的质点。若二者形心 C 位置相同，则 $m=kM$，其中 k=

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4　　E. 0.5　　F. 0.6



答案：**E**　　　解答：

	质量	半径		质量	半径
圆板	M	R	圆板	M	R
圆洞	$-M/4$	$R/2$	质点	kM	$3R/2$
圆板–圆洞	$3M/4$	d_{AC}	圆板+质点	$(1+k)M$	d_{AC}

$MR+(-M/4)(R/2) = (M-M/4)\, d_{AC} \Rightarrow d_{AC} =7R/6$;

$MR+(kM)(3R/2)=(1+k)M(d_{AC})=(1+k)M(7R/6) \Rightarrow k=\underline{0.5}$.

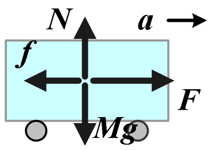
2. 一辆质量为 2,000kg 的汽车，发动机额定功率为 80kW。它在公路上行驶时所受阻力为车重的 0.2 倍。若汽车保持恒定功率行驶，运动的最大速度 v_m=

A. 15m/s　　B. 20m/s　　C. 25m/s　　D. 30m/s　　E. 35m/s　　F. 40m/s

3. (续上题)若汽车以加速度 2m/s^2 做匀加速行驶，匀加速运动的最长时间 t=

A. 2s　　B. 3s　　C. 4s　　D. 5s　　E. 6s　　F. 7s

答案：**B D**　　　解答：已知质量M=2,000kg，额定功率P_e=80,000W，阻力$f=0.2Mg$=4,000N.



由汽车的受力运动图，应用牛顿运动定律，有 $F-f=Ma$.

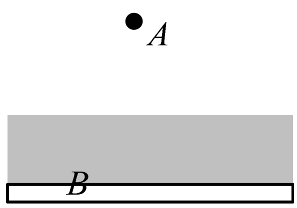
(1) 匀速运动 a=0，恒力 $F=f$=4,000N.

由 $P_e=Fv$，得到汽车做匀速运动的最大速度 v= <u>20m/s</u>.

(2) 匀加速运动$a=2\text{m/s}^2$，$F=f+Ma$=8,000N.

由 $P_e=Fv$，得到汽车做匀加速运动的最终速度 v=10m/s；由 $v=at$ 有最长时间 t=<u>5s</u>.

4. 重力场中质量为 m 的小球 A 位于某一高度；质量为 M 的平板 B 位于水平地面上。在平板表面的上方，存在一定厚度的排斥力场，当小球 A 进入「相互作用区域」时，平板 B 与球 A 之间会有竖直方向的排斥力 $F=6mg$；恒力 F 对 A 的作用使其不与 B 的上表面接触。在水平方向上 A 和 B 之间没有相互作用力。



球在点 A 经历时间 t_1=1s 到达排斥力场，则它从开始自由下落到再次回到初始位置所经历的时间 T=

A. 2.0s　　B. 2.1s　　C. 2.2s　　D. 2.3s　　E. 2.4s　　F. 2.5s

5. (续上题)小球A在运动的一个周期所经过的路程S=

A. 11m　　B. 12m　　C. 13m　　D. 14m　　E.15m　　F. 16m

6. (续上题)当小球A开始自由下落的时刻，平板B以速度v_0=20m/s向右滑动，并且平板与水平地面之间的滑动摩擦系数μ=0.25和质量之比m:M=1:10。假设平板足够长，保证A总能落入上方的该区域。在小球A运动的一个周期T内，平板B速度的减少Δv=

A. 3.2m/s　　B. 4.0m/s　　C. 5.0m/s　　D. 6.6m/s　　E.9.8m/s　　F. 16m/s

7. (续上题)当平板B停止滑动时，球A已经回到初始位置的次数N=

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5　　F. 6

答案：**E B D C**

解答1：(过程法)

过程	I	II	III	IV
A	(ia) $v_t=v_0+at$	(ib) $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$	(ic) $v_t^2=v_0^2+2as$	(ii) $\Sigma F=ma$
运动	自由落体	匀减速	匀加速	竖直上抛
$\Sigma F=$	mg	$mg-6mg=-5mg$	$-5mg$	mg
$a=$	g	$-5g$	$-5g$	g
$t=$	**1s**	$0=10+(-5g)t \Rightarrow$ 0.2s	0.5s	1s
$v_0=$	0	10m/s	0	10m/s
$v_t=$	$gt=10\times1=$10m/s	0	10m/s	0
$h=$	$\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times10\times1^2=$5m	$0=10^2+2(-5g)h \Rightarrow$ 1m	1m	5m
B	(iii) $f=\mu N \quad \Rightarrow -f=Ma \Rightarrow a=-\mu\frac{N}{M}$			
运动	匀减速i	匀减速ii	匀减速ii	匀减速i
$N=$	$Mg=10mg$	$Mg+6mg=16mg$	$13mg$	$10mg$
$a=$	$-\mu g=-2.5\text{m/s}^2$	$-1.6\mu g=-4\text{m/s}^2$	-4m/s^2	-2.5m/s^2
$v_0=$	20m/s	17.5m/s	16.7m/s	15.9m/s
$v_t=$	$v_0+at=20-2.5\times1=$17.5m/s	$=17.5-4\times0.2=$16.7m/s	15.9m/s	13.4m/s
$s=$	$20\times1+\frac{1}{2}(-2.5)\times1^2=$18.75m	$17.5\times0.2+\frac{1}{2}(-4)\times0.2^2=$3.42m	3.26m	14.65m

解答2： (状态法)

(1) 在小球A从开始下落到进入「相互作用区域」，所经历的时间t_1=1s和高度h_1=5m；之后其做减速运动直至速度为零，所经历的时间设为t_2和下落的高度设为h_2。

对全过程应用动量定理$\Sigma Ft=\Delta(mv)$ 即$mg(t_1+t_2)-(6mg)t_2=0 \Rightarrow t_2=0.2$s.

$\therefore$ 球A运动的一个周期$T=2(t_1+t_2)=$ 2.4s.

对全过程应用动能定理$\Sigma W=\Delta E$ 即$mg(h_1+h_2)-(6mg)h_2= \Rightarrow h_2=\dfrac{mgH}{F-mg}=\dfrac{5}{6-1}=1$m.

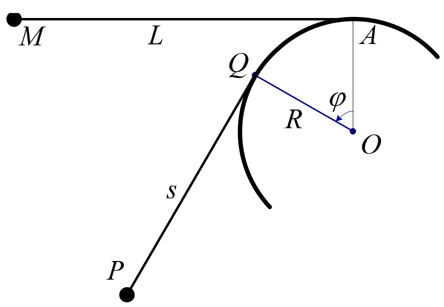
$\therefore$ 球A运动的一个周期经过的路程$S=2(h_1+h_2)=$12m.

(2) 设在小球A运动的一个周期T内，平板B的速度减少为Δv，

由动量定理$\mu(Mg)2t_1+\mu(Mg+6mg)2t_2=M\,\Delta v \Rightarrow \mu(10g)2t_1+\mu(10g+6g)2t_2=10\Delta v \Rightarrow \Delta v=2\mu g(t_1+1.6t_2)=$6.6m/s.

小球A回到初始位置的次数$n=\dfrac{v_0}{\Delta v}=\dfrac{20}{6.6}\approx3.03$. $\therefore$ $N=3$.

8. 长度为 L 的水平细绳(不计质量和不可伸长)，左端有一个质量为 M 的小球，右端系在半径为 R 和圆心为 O 的固定圆柱体顶端的 A 点上。小球被释放后绕圆柱体摆动，运动到点 P 时，摆线与圆柱体在 Q 点相切。



设切线 $PQ=s$ 和圆心角 $AOQ=\varphi$；则摆球运动到 P 点时下降的高度 $h(\varphi)$=

A. $L\sin\varphi+R(1-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)$　　B. $L\cos\varphi+R(1-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)$　　C. $L\sin\varphi+R(1-\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$

D. $L\sin\varphi-R(1-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)$　　E. $L\sin\varphi+R(1+\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)$　　F. $L\sin\varphi+R(1-\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$

9. (续上题)已知 $L=(2+\pi/2)R$，则摆球运动到最低点时下降的高度 $H=$

A. $3.0R$　　B. $3.2R$　　C. $3.4R$　　D. $3.6R$　　E. $3.8R$　　F. $4.0R$

10. (续上题)设 V 为摆球运动过程的最大速度，则 $V^2=$

A. gR　　B. $2gR$　　C. $3gR$　　D. $4gR$　　E. $5gR$　　F. $6gR$

11. (续上题)摆球在最大速度时，细绳的张力 $T=$

A. $2Mg$　　B. $3Mg$　　C. $4Mg$　　D. $5Mg$　　E. $6Mg$　　F. $7Mg$

答案：**A A F C**　　　解答：

(1) $L=MA=$直线 $PQ+$弧线 $QA=s+R\varphi \Rightarrow s$ 和φ的关系 $s=L-R\varphi$.

质点摆动到 P 点时下降高度 $h=R(1-\cos\varphi)+s\sin\varphi,=R(1-\cos\varphi)+(L-R\varphi)\sin\varphi \quad \Rightarrow$

$$h(\varphi)=\underline{L\sin\varphi+R(1-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)}.$$

(2) 质点在最低点时 $\varphi=90^0=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow H=h(\dfrac{\pi}{2})=L+R(1-\dfrac{\pi}{2})$.

已知 $L=(2+\dfrac{\pi}{2})R$，$H=(2+\dfrac{\pi}{2})R+R(1-\dfrac{\pi}{2})=\underline{3R}$.

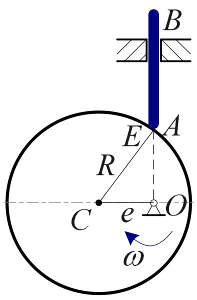
(3) 机械能守恒 $MgH=\dfrac{1}{2}MV^2- \Rightarrow V^2=2gH=\underline{6gR}$.

(4) 牛顿定律$\Sigma F=ma \Rightarrow \ T-Mg=M\dfrac{V^2}{3R-R} \ \Rightarrow T=\underline{4Mg}$.

12. 半径 R=5cm 和偏心距 e=3cm 的偏心圆盘绕水平轴 O 以匀角速度 ω=4rad/s 作顺时针转动，使顶杆 AB 沿着轴线通过点 O 在的竖直滑槽上下移动。当圆心 C 与轴 O 在同一水平线上时顶杆以 cm/s 为单位元的速率是

13. (续上题)以 cm/s^2 为单位的加速度大小是

A. 12B. 16　　C. 20　　D. 24　　E. 30　　F. 36



答案：**A F**　　　解答：

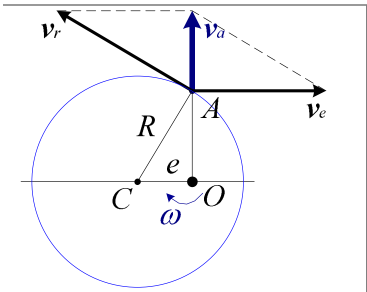
(1) 顶杆 AB 与凸轮之间存在相对运动。

动点	AB 杆的 A 点	绝对运动	A 点沿铅直方向的直线运动
动系	凸轮	相对运动	A 点沿凸轮表面的圆周运动
静系	基座	牵连运动	凸轮绕 O 轴的匀速转动

(2) 速度分析和加速度分析

	$\boldsymbol{v}_a$	$\boldsymbol{v}_e$	$\boldsymbol{v}_r$	$\boldsymbol{a}_a$	$\boldsymbol{a}_e$	$\boldsymbol{a}_r^{\tau}$	$\boldsymbol{a}_r^{n}$	$\boldsymbol{a}_k$
方向	竖直	水平向右	沿凸轮切线	竖直	指向 O	沿凸轮切线	指向 O	沿 CA
大小	未知	$\sqrt{R^2-e^2}\,\omega$	未知	未知	$\sqrt{R^2-e^2}\,\omega^2$	未知	$\dfrac{v_r^2}{R}=R\omega^2$	$2\omega v_r=2R\omega^2$

(3) 求速度和求加速度

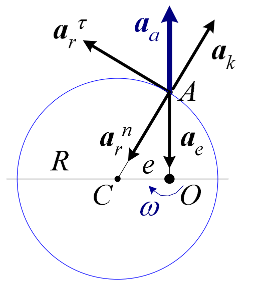


应用速度合成定理 $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$ 画出速度合成图.

$\dfrac{v_a}{v_e}=\dfrac{e}{\sqrt{R^2-e^2}} \ \Rightarrow v_a=v_e\dfrac{e}{\sqrt{R^2-e^2}}=e\omega$.

顶杆速率 v_a=3cm×4/s=<u>12cm/s</u> 方向竖直向上.

$\dfrac{v_r}{v_e}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-e^2}}$，$v_r=v_e\dfrac{R}{\sqrt{R^2-e^2}}=R\omega$方向指向左上方.



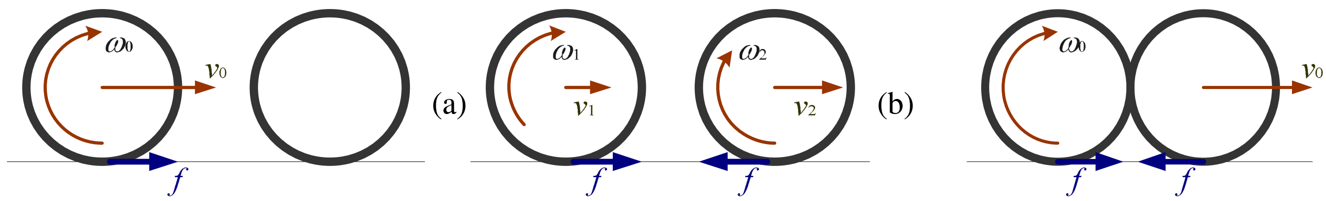
应用牵连运动为定轴转动时的加速度合成定理 $a_a=a_e+a_r^\tau+a_r^n+a_k$ 画出加速度合成图. $a_a\sin\theta=a_k-a_r^n-a_e\sin\theta\Rightarrow$

$$a_a=\frac{a_k-a_r^n}{\sin\theta}-a_e=\frac{R}{\sqrt{R^2-e^2}}(2R\omega^2-R\omega^2)-\sqrt{R^2-e^2}\,\omega^2=\frac{e^2}{\sqrt{R^2-e^2}}\omega^2.$$

顶杆加速度 $a_a=3^2/\sqrt{5^2-3^2}\times4^2$ =36cm/s².

14. 如图(a)所示，在水平地面上有二完全相同的均匀圆柱/圆球形刚体，刚体 1 做质心速度为 v_0 的纯滚动，刚体 2 则静止不动。若两者做完全弹性碰撞，则碰撞后它们的瞬时质心速度和瞬时角速度分别为

刚体	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1	v_0 和 ω_0	$0.5v_0$ 和 $0.5\omega_0$	$0.25v_0$ 和 $0.25\omega_0$	0 和 0	v_0 和 0	0 和 ω_0
2	0 和 0	$0.5v_0$ 和 $0.5\omega_0$	$0.75v_0$ 和 $0.75\omega_0$	v_0 和 ω_0	0 和 ω_0	v_0 和 0



15. (接题 14)若两者是均匀圆柱体，则完全弹性碰撞后它们达到纯滚动时的质心速度 v_1 和 v_2=

16. (接题 14)若两者是转动惯量为 $I=2MR^2/3$ 的薄壁球壳，则完全弹性碰撞后达到纯滚动时 v_1 和 v_2=

A. $\frac{2}{3}v_0$ 和 $\frac{1}{3}v_0$　B. $\frac{1}{2}v_0$ 和 $\frac{1}{2}v_0$　C. $\frac{2}{5}v_0$ 和 $\frac{3}{5}v_0$　D. $\frac{1}{3}v_0$ 和 $\frac{2}{3}v_0$　E. $\frac{2}{7}v_0$ 和 $\frac{5}{7}v_0$　F. $\frac{1}{4}v_0$ 和 $\frac{3}{4}v_0$

17. (接 15 题)　**18.** (接 16 题)　由图(a)至图(b)整个过程中损失机械能的百分数为

A. 50%　B. 48%　C.46.7%　D. 45.5%　E. 44.4%　F. 40.8%

答案：**F D C E B**　解答：

如图所示，两刚体完成弹性碰撞时，交换质心速度 $v_0=R\omega_0$ 而角速度 ω_0 不变。

设两刚体各经过时间 T_1 和 T_2 达到角速度为 ω_1 和 ω_2 的纯滚动，则质心速度 $v_1=R\omega_1$ 和 $v_2=R\omega_2$。

对它们使用动量定理和动量矩定理，完全弹性碰撞后球达到纯滚动时的质心速度

刚体	动量定理	动量矩定理	质心速度
1	$fT_1=Mv_1$	$(fR)T_1=I(\omega_0-\omega_1)$	$v_1=\frac{I_c}{I_c+MR^2}v_0=\frac{k}{k+1}v_0$
2	$fT_2=M(v_0-v_2)$	$(fR)T_2=I\omega_2$	$v_2=\frac{MR^2}{I_c+MR^2}v_0=\frac{1}{k+1}v_0$

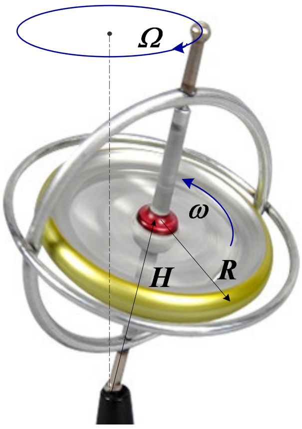
系统原机械能 $E_k=\frac{1}{2}Mv_0{}^2+\frac{1}{2}I\omega_0{}^2=\frac{1+k}{2}Mv_0{}^2$,

完全弹性碰撞后两球达到纯滚动时机械能 $E_k{}'=\frac{1}{2}Mv_1{}^2+\frac{1}{2}I\omega_1{}^2+\frac{1}{2}Mv_2{}^2+\frac{1}{2}I\omega_2{}^2=\frac{1+k}{2}M(v_1{}^2+v_1{}^2)$.

全部过程中损失的机械能 $\eta=\frac{E_k-E_k{}'}{E_k}=1-\frac{v_1{}^2+v_2{}^2}{v_0{}^2}$.

	薄壁圆柱壳	薄壁球壳	圆柱体	球体
转动惯量 $I_c=kMR^2$，其中 k=	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
达到纯滚动时的质心速度 $\frac{v_1}{v_0}=\frac{k}{k+1}$ 和 $\frac{v_2}{v_0}=\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$ 和 $\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$ 和 $\frac{5}{7}$
全部过程中损失的机械能 $\eta=1-\frac{v_1{}^2+v_2{}^2}{v_0{}^2}$ =	$\frac{1}{2}$=50%	$\frac{12}{25}$=48%	$\frac{4}{9}$=44.4%	$\frac{20}{49}$=40.8%

19. 陀螺仪(Gyroscope)是一种用来感测与维持方向的装置，基于角动量守恒的理论设计出来的。陀螺仪主要是由一个位于轴心且可旋转的转子构成。陀螺仪一旦开始旋转，由于转子的角动量，陀螺仪有抗拒方向改变的趋向。如图所示，一陀螺仪均匀盘转子质量为 M 和半径为 R 并且以角速度 ω 转动，转轴长度为 H 并且其质量远小于均匀盘。转轴的另外一端铰合在桌上，但是转轴可以在任何方向上自由转动并且倾斜于垂直方向。



转子的角动量向量的大小和方向为

A. $\dfrac{MR^2}{2}\omega$ 沿转轴向上　　B. $\dfrac{MR^2}{2}\omega$ 沿转轴向下　　C. $\dfrac{MR^2}{2}\omega$ 垂直于转轴

D. $MR^2\omega$ 沿转轴向上　　E. $MR^2\omega$ 沿转轴向下　　F. $MR^2\omega$ 垂直于转轴

20. (续上题) 陀螺仪进动的角速度 $\Omega = k\,(gH/R^2\omega)$，其中 k=

A. 1　　B. 1.5　　C. 2　　D. 2.5　　E. 3　　F. 3.5

答案：**A C**　　解答：角动量 $L=I\omega=\dfrac{MR^2}{2}\omega$.

扭矩 $\tau=MgH\sin\theta$ 并指向垂直于纸面. 角动量的变化 $\Delta L=L\sin\theta\,\Delta\phi$.

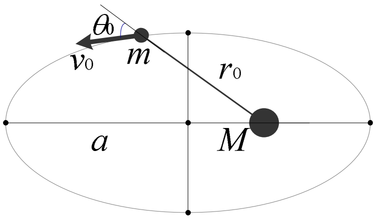
角动量定理 $\tau\Delta t=\Delta L \Rightarrow \tau=\dfrac{\Delta L}{\Delta t}=J\sin\theta\dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}=(L\sin\theta)\Omega \Rightarrow \Omega=\underline{\dfrac{2gH}{R^2\omega}}$.

21. (12 分)

质量为 m 的卫星环绕质量为 M 的地球运行。当与地球中心距离为 r_0 时，卫星的速率为 v_0 并且速度方向与向外的径向矢量成角度 θ_0。试写出如下表达式：

(1) 卫星的机械能 E_0 和角动量 L_0；　(2) 卫星与地球中心最短距离 r_{min} 和最长距离 r_{max}；

(3) 椭圆轨道的半长轴 a；　(4) 卫星轨道的周期 T。



解答：

(1) 卫星的机械能 $E_0=E_k+E_p=\dfrac{1}{2}mv_0^2-\dfrac{GMm}{r_0}$ 和角动量 $L_0=mr_0v_0\sin\theta_0$ 垂直于轨道平面指向外.

(2) 在最远和最近距离，速度与矢径垂直即 θ_0=0 和 180^0，则

角动量守恒 $L_0=mrv \Rightarrow v=\dfrac{L_0}{mr} \Rightarrow E_k=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{L_0}{mr}\right)^2=\dfrac{L_0{}^2}{2mr^2}$

机械能守恒 $\dfrac{L_0{}^2}{2mr^2}-\dfrac{GMm}{r}=E_0 \Rightarrow r^2+\dfrac{GMm}{E_0}r-\dfrac{L_0{}^2}{2mE_0}=0 \Rightarrow r=-\dfrac{GMm}{2E_0}\pm\sqrt{(\dfrac{GMm}{2E_0})^2+\dfrac{L_0{}^2}{2mE_0}}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} r_{max} \\ r_{min} \end{matrix} = r_0\left(\frac{GM}{2GM-r_0v_0^2}\pm\sqrt{(\frac{GM}{2GM-r_0v_0^2})^2-\frac{r_0v_0^2\sin^2\theta_0}{2GM-r_0v_0^2}}\right)$$

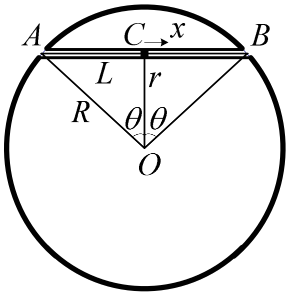
(3) 半长轴 $a=\frac{1}{2}(r_{max}+r_{min})=\frac{GMr_0}{2GM-r_0v_0^2}$.

(4) 开普勒第三定律 $\frac{\tau^2}{a^3}=K \Rightarrow \tau^2=\frac{4\pi^2}{GM}a^3=\frac{4\pi^2}{GM}(\frac{GMr_0}{2GM-r_0v_0^2})^3=(2\pi GM)^2(\frac{r_0}{2GM-r_0v_0^2})^3$

$\Rightarrow$ 卫星的轨道周期 $\tau=2\pi GM(\frac{r_0}{2GM-r_0v_0^2})^{3/2}$.

22. (20 分)

沿半径 R=6,400km 和重力加速度 g=10m/s^2 的地球弦线 ACB 挖一条光滑通道，设 $AC=BC=L$。



(1) 试描述质量为 m 的物体在中心点 C 附近的运动情况。
(2) 试写出物体在信道中运动的最大速度 V。
(3) 已知地球表面距离：(a) 北京至广州之间为 1,250 公里；(b) 广州至香港 150 公里。
当局拟建造二条连接贯穿三座城市的铁路隧道。试分别计算：(i) 隧道长度 $2L$，(ii) 隧道距离地球表面的最大深度；(iii) 列车在隧道行驶的最大速度 V；(iv) 列车通过隧道所需的时间 t。
(4) 有学者提出了不用火箭发射人造地球卫星的设想：在通道出口 A 和 B，分别将质量为 m_1 的待发射卫星和质量为 m_2 的重物同时自由释放，只要 $m_1<m_2$，它们弹性碰撞后卫星就会从信道口 A 冲出。试求：
(i) 发射卫星 m_1 和重物 m_2 弹性碰撞之后的瞬时速度 v_1 和 v_2；
(ii) 发射卫星返回到出口 A 的速度为 u；
(5) 设发射卫星上有一种装置，在卫星刚离开出口 A 时，立刻把速度方向变为沿该处地球切线的方向，但是不改变速度的大小。这样，发射卫星便有可能绕地心 O 做匀速圆周运动，成为一颗人造地球卫星。试求：地心到该通道的距离与地球半径之比 r/R(以参量 m_1 和 m_2 表达)。
(6) 设质量(i)$m_2=2m_1$；和(ii)$m_2=20m_1$。试计算两种情况下通道距离地球表面的最大深度。

解答：

(1) 质量为 m 的物体在距离地心为 r 处所受万有引力 $F(r)=\frac{GmM_r}{r^2}=\frac{GmM}{r^2}(\frac{r}{R})^3=\frac{GmM}{R^3}r$.

质量 m 在地球表面所受万有引力 $F(R)=\frac{GmM}{R^2}\approx mg$.

对于质量 m 在平衡位置 C 点沿信道方向的位移 x，有地心引力

$$F=\frac{GmM}{R^3}\sqrt{r^3+x^2} \quad \Rightarrow \quad F_x=(\frac{GmM}{R^3}\sqrt{r^2+x^2})\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{GmM}{R^3}x=\frac{mg}{R}x.$$

$\boldsymbol{F_x=-\frac{mg}{R}x=ma \Rightarrow a+\omega^2x=0}$, $\boldsymbol{\omega^2=\frac{g}{R}}$，即质量 m 以 C 为平衡位置做周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ 简谐振动.

(2) 机械能守恒 $\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}kL^2 \Rightarrow V^2=\frac{k}{m}L^2=\frac{g}{R}L^2 \Rightarrow$ 列车在 C 点具有最大速度 $V=\sqrt{\frac{g}{R}}L$.

(3) (i)$\theta=\frac{s/2}{R}\cdot\frac{180}{\pi}=\frac{90s}{\pi R}$，隧道长度 $2L=2R\sin\theta$; (ii) 最大深度 $R-r=R(1-\cos\theta)$;

(iii) 最大速度 $V=\sqrt{\frac{g}{R}}L$; (iv) 通过隧道所需的时间 t=半周期=$\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

铁路隧道	$s=$	$\theta=\dfrac{90s}{\pi R}\approx$	(i) 隧道长度 $2L=2R\sin\theta\approx$	(ii) 最大深度 $=R(1-\cos\theta)\approx$	(iii) $V=\sqrt{\dfrac{g}{R}}L$	(iv) $=\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$
(a)北京至广州	1,250 km	5.5953^0	1,248 km	30.49 km	780 m/s	2,512 s =41.87 min.
(b)广州至香港	150 km	0.6714^0	150 km	0.4394 km	93.75m/s	

(4) 质量为 m 的待发射卫星和质量为 Km 的重物在通道的两个出口处 A 和 B 同时自由释放，经历时间 $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ 后在中心点 C 相遇，同时达到最大速度 $V=\sqrt{\dfrac{g}{R}}L$。它们弹性碰撞后的瞬时速度为 v_1 和 v_2，则

动量守恒 $m_1V+m_2(-V)=m_1(-v_1)+m_2v_2 \Rightarrow m_2v_2=(m_1-m_2)V+m_1v_1$ (a)

机械能守恒 $\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}m_2V^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow (m_1+m_2)V^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2$ (b)

(b)×m_2 有 $(m_1+m_2)m_2V^2=m_1m_2v_1^2+(m_2v_2)^2$ (c)

(a)代入(c)有 $(m_1+m_2)v_1^2+2(m_1-m_2)Vv+(m_1-3m_2)V^2=0$

$\Rightarrow (v_1+V)[(m_1+m_2)v_1+(m_1-3m_2)V]=0 \Rightarrow v_1+V=0$ or $(m_1+m_2)v_1+(m_1-3m_2)V=0$.

解得 $v_1=-V$ 及 $v_2=-V$(舍去)，或 $v_1=\dfrac{3m_2-m_1}{m_1+m_2}V$ 及 $v_2=\dfrac{3m_1-m_2}{m_1+m_2}V$.

(ii) 发射卫星 m_1 在中心点 C 以速度 $v_1=\dfrac{3m_2-m_1}{m_1+m_2}V$。设返回到信道出口 A 的速度为 u

机械能守恒 $\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1u^2+\frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}m_1u^2+\frac{1}{2}m_1V^2$

$\Rightarrow u^2=v_1^2-V^2=[(\dfrac{3m_2-m_1}{m_1+m_2})^2-1]V^2=\dfrac{8m_2(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}\dfrac{g}{R}L^2=\dfrac{8m_2(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}gR(1-(\dfrac{r}{R})^2)$ (iv)

(5) 人造地球卫星 m_1 绕地心 O 做匀速圆周运动，则 $m_1g=m_1\dfrac{u^2}{R} \Rightarrow u^2=gR$，即

$$\frac{8m_2(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)^2}gR(1-(\frac{r}{R})^2)=gR \Rightarrow 1-(\frac{r}{R})^2=\frac{(m_1+m_2)^2}{8m_2(m_2-m_1)} \Rightarrow \frac{r}{R}=\sqrt{1-\frac{(m_1+m_2)^2}{8m_2(m_2-m_1)}}\le 1.$$

(6) 设 $\dfrac{m_2}{m_1}=c$，$\dfrac{r}{R}=\sqrt{1-\dfrac{(m_1+m_2)^2}{8m_2(m_2-m_1)}}=\sqrt{1-\dfrac{(1+c)^2}{8c(c-1)}}\le 1$.

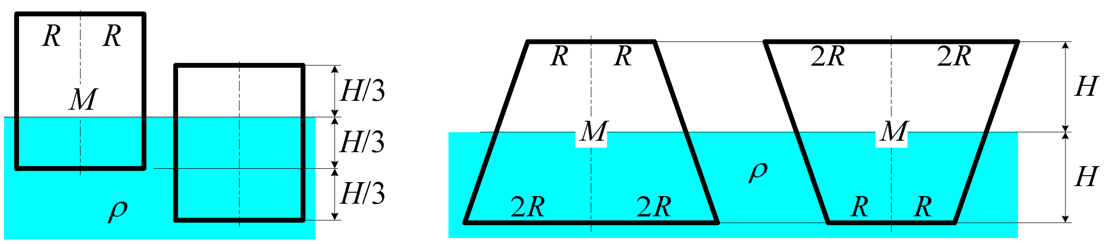
通道距离地球表面的最大深度 $h=R-r=R(1-\sqrt{1-\dfrac{(1+c)^2}{8c(c-1)}})$.

(i) $m_2=2m_1$, h=2,167km；(ii) $m_2=20m_1$, h=482km.

$c=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100	500	1000
$r/R=$	0.6614	0.8165	0.8600	0.8803	0.8921	0.8997	0.9051	0.9091	0.9121	0.9246	0.9313	0.9334	0.9350	0.9352
$h/R=$	0.3386	0.1835	0.1400	0.1197	0.1079	0.1003	0.0949	0.0909	0.0879	0.0754	0.0687	0.0666	0.0650	0.0648
h /km=	2167	1174	896.1	765.8	690.6	641.7	607.4	582.0	562.5	482.4	439.8	426.4	415.9	414.6

23. (12 分)

密度为ρ的液体中，静止地浸有密度为P及质量为 M 的



(a) 高度为 H 和底面半径为 R 的圆柱体，液体分别浸到圆柱的 $H/3$ 和 $2H/3$ 高度处；
(b) 高度为 $2H$、底面半径为 R 和 $2R$ 的正立和倒立圆台，液体浸到圆台的一半高度处。
试分别填写四种情况下物体(1)质量 M，(2)与液体的密度之比 P/ρ，和(3)受到微小干扰后的振荡频率 ω^2。

解答：

已知液体密度 ρ 并且设圆台在液体内部分的体积为 V，则液体对圆锥体的浮力 $f=\rho Vg$.

由阿基米得定理 $G=f$，即 $Mg=\rho gV \Rightarrow PV_0=\rho V \Rightarrow$ 密度之比 $\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{V}{V_0}$.

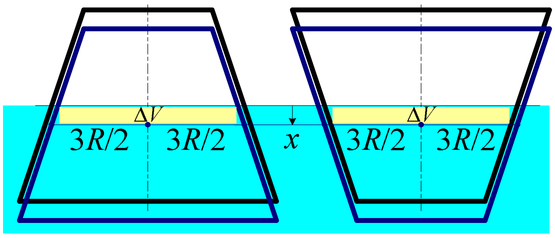
(a) 密度为 P 的圆柱体积 $V_0=\pi R^2H$，则质量 $M=PV=P\pi R^2H$.

平衡时 $\Sigma F=G-f=0$. 圆台向下微小位移 x 时浸在液体内体积增加 $\Delta V=\pi R^2x$.

合力 $\Sigma F=G-(f+\Delta f)=-\Delta f=-\rho\Delta V=-\rho\pi R^2x$

圆台体积 $V_0=\pi R^2H$	液体浸到圆柱的 $H/3$ 高度处	液体浸到圆柱的 $2H/3$ 高度处
平衡时浸在液体内体积 $V=$	$\pi R^2H/3$	$2\pi R^2H/3$
(1) 密度之比 $P/\rho=$	$1/3$	$2/3$
(2) 质量 $M=\rho V=$	$\rho\pi R^2H/3$	$2\rho\pi R^2H/3$
合力 $\Sigma F=-\rho g\Delta V=Ma$	$-\rho g\pi R^2x=(\rho\pi R^2H/3)a$	$-\rho\pi R^2x=(2\rho\pi R^2H/3)a$
(3) $a+\omega^2x=0$	$a+\dfrac{3g}{H}x=0$，其中 $\omega^2=\dfrac{3g}{H}$	$a+\dfrac{3g}{2H}x=0$，其中 $\omega^2=\dfrac{3g}{2H}$

(b)



密度为 P 的圆台体积 $V_0=\dfrac{1}{3}\pi[R^2+R(2R)+(2R)^2](2H)=\dfrac{14}{3}\pi R^2H$，则质量 $M=PV=\dfrac{14}{3}\pi R^2H\,P$.

圆台体积 $V_0=\dfrac{14}{3}\pi R^2H$	正立圆台	倒立圆台
平衡时浸在液体内体积 $V=$	$\dfrac{\pi}{3}[(\dfrac{3}{2}R)^2+(\dfrac{3}{2}R)(2R)+(2R)^2]H=\dfrac{37}{12}\pi R^2H$	$\dfrac{\pi}{3}[R^2+R(\dfrac{3}{2})+(\dfrac{3}{2}R)^2]H=\dfrac{19}{12}\pi R^2H$
(1) 密度 $\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{V}{V_0}=$	$\dfrac{37}{56}$	$\dfrac{19}{56}$
(2) 质量 $M=\rho V=$	$\dfrac{37}{12}\pi R^2H\rho$	$\dfrac{19}{12}\pi R^2H\rho$
合力 $\Sigma F=-\rho g\Delta V=Ma$	$-\rho\dfrac{9}{4}\pi R^2x=(\dfrac{37}{12}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho\dfrac{9}{4}\pi R^2x=(\dfrac{19}{12}\pi R^2H\rho)a$
(3) $a+\omega^2x=0$,振荡频率 $\omega^2=$	$a+\dfrac{27g}{37H}x=0$，其中 $\omega^2=\underline{\dfrac{27g}{37H}}$	$a+\dfrac{27g}{19H}x=0$，其中 $\omega^2=\underline{\dfrac{27g}{19H}}$

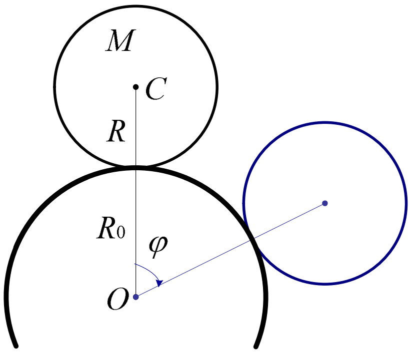
24. (16 分)

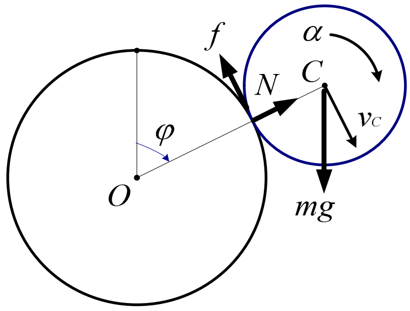
一个球心为 C、质量为 M、半径为 R 和转动惯量 $I=kMR^2$ 的均质刚性球体，静止在圆心为 O 和半径为 $R_0(>R)$的圆柱面顶点，受微小干扰后而自由滚下。设球和圆柱面之间静摩擦系数为 μ。试

(1) 求球心 C 的速度 $v_c(\varphi)$，其中 φ 为联机 CO 的转动角度。
(2) 写出圆柱面对球的支持力 N 和其所受静摩擦力 f 的表达式。
(3) 求球与圆柱面分离时的临界角 φ_0。
(4) 为使球在 $\varphi\le 30^0$ 范围内做纯滚动，求圆柱面和小球之间静摩擦系数的最小值 μ_{min}。
(5) 通过讨论摩擦系数 μ，确定角度 φ 的最小值 φ_{min} 和最大值 φ_{max}。
(6) 已知实心球 $I=2MR^2/5$ 和空心薄壁球 $I=2MR^2/3$，填写答题纸中表格。

解答：

设球在圆柱表面滚动时，中心 C 的速度为 v_c 和角加速度为 α。





(1)　球做纯滚动，静摩擦力 $f\,(\le\mu N)$ 不做功。由机械能守恒有

$$Mg(R_0+R)(1-\cos\varphi)=\frac{1}{2}Mv_c^{\ 2}+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}Mv_c^{\ 2}+\frac{1}{2}(kMR^2)(\frac{v_c}{R})^2=\frac{1+k}{2}Mv_c^{\ 2}\ \Rightarrow v_c^{\ 2}=2g(R_0+R)\frac{1-\cos\varphi}{1+k}.$$

(2)　由质心运动定律和转动定律有 $\Sigma F_n=Mg\cos\varphi-N=M\dfrac{v_C^{\ 2}}{R_0+R}\ \Rightarrow N=M(g\cos\varphi-\dfrac{v_C^{\ 2}}{R_0+R})$　　(i)

$\Sigma F_t=Mg\sin\varphi-f=M(R\alpha)\qquad\Rightarrow f=M(g\sin\varphi-R\alpha)$　　(ii)

$\Sigma\tau=I\alpha\qquad\Rightarrow fR=I\alpha$　　(iii)

以 $v_c^{\ 2}$ 代入式(i)有圆柱面对球的 支持力 $N=Mg\dfrac{(3+k)\cos\varphi-2}{1+k}$　　(vi)

由(ii)和(iii)有　　静摩擦力 $f=Mg\dfrac{k\sin\varphi}{1+k}$　　(v)

(3)　当 $N>0$ 时，小球在圆柱面上滚动；当 $N=0$ 即 $\cos\varphi_0=\dfrac{2}{3+k}$ 时，小球由圆柱面滑落。

(4)　由 $f\le\mu N$ 有 $\mu(\varphi)\ge\dfrac{f}{N}=\dfrac{k\sin\varphi}{(3+k)\cos\varphi-2}$.

(5)　球在 $\varphi\le30^0$ 范围内做纯滚动 $\mu(30^0)\ge\dfrac{k}{(3+k)\sqrt{3}-4}=\mu_{\min}$.

(5)　$\mu=0$ 光滑表面 $\Rightarrow\sin\varphi=0$ 即 $\varphi=0=\varphi_{\min}$ 球由圆柱面顶部直接滑落；

$\mu\to\infty$ 完全粗糙表面 $\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{2}{3+k}=\cos\varphi_{\max}$ 即球与圆柱面分离时的临界角 φ_0。

设　转动惯量 $I=kMR^2$	实心球　$k=2/5$	空心薄壁球　$k=2/3$
(1) 球心 C 的速度 $v_c^{\ 2}=2g(R_0+R)\dfrac{1-\cos\varphi}{1+k}$	$v_c^{\ 2}=\dfrac{10}{7}g(R_0+R)(1-\cos\varphi)$	$v_c^{\ 2}=\dfrac{6}{5}g(R_0+R)(1-\cos\varphi)$
(2) 支持力 $N=Mg\dfrac{(3+k)\cos\varphi-2}{1+k}$ 和 其所受静摩擦力 $f=Mg\dfrac{k\sin\varphi}{1+k}$.	$N=Mg\dfrac{17\cos\varphi-10}{7}$ 和 $f=\dfrac{2}{7}Mg\sin\varphi$	$N=Mg\dfrac{11\cos\varphi-6}{5}$ 和 $F=\dfrac{2}{5}Mg\sin\varphi$
(3) 当 $N=0$ 即临界角 $\cos\varphi_0=\dfrac{2}{3+k}$ 时，球滑落.	$\varphi_0=53.97^0$	(0=56.940
(4) 静摩擦系数 $\mu(\varphi)\ge\dfrac{k\sin\varphi}{(3+k)\cos\varphi-2}=\mu_{\min}$	$\mu_{\min}=\dfrac{2\sin\varphi}{17\cos\varphi-10}$	$\mu_{\min}=\dfrac{2\sin\varphi}{11\cos\varphi-6}$
(5) 球在范围 $\varphi\le30^0$ 做纯滚动 $\mu(30^0)\ge\dfrac{k}{(3+k)\sqrt{3}-4}=\mu_{\min}$	$\mu_{\min}=\dfrac{2}{17\sqrt{3}-20}=0.2118$	$\mu_{\min}=\dfrac{2}{11\sqrt{3}-12}=0.2836$
(6) 角度最小值 $\varphi_{\min}=0$, 球将会由圆柱面顶部直接滑落.	$\varphi_{\min}=0$ 当 $\mu=0$	$\varphi_{\min}=0$ 当 $\mu=0$
最大值 $\cos\varphi_{\max}=\dfrac{2}{3+k}$，即球与圆柱面分离时的临界角 φ_0	$\varphi_{\max}=54^0$ 当 $\mu\to\infty$	$\varphi_{\max}=57^0$ 当 $\mu\to\infty$