2019 年第 15 届泛珠赛 力學基礎試（2 月 15 日）

I. 答案

选择题 (20×2 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	F	A	F	B	E	C	E	C	D	D	A	B	B	A	C	D	E	F	C

21. (8分)

(1) 液体浸到圆锥体高度的 1/3 (4 分)			(2) 液体浸到圆锥体高度的 2/3 (4 分)		
(a) $\frac{P}{\rho}=\underline{\frac{19}{27}}$	(b) $M=\underline{\frac{19}{3}}\rho\pi R^2H$	(c) $\omega^2=\underline{\frac{12}{19}}\frac{g}{H}$	(a) $\frac{P}{\rho}=\underline{\frac{26}{27}}$	(b) $M=\underline{\frac{26}{3}}\rho\pi R^2H$	(c) $\omega^2=\underline{\frac{3}{26}}\frac{g}{H}$

22. (20 分)

(1)	(a) 瞬时轴 $x=\underline{\frac{2}{3}}L$; 细杆转动 $\omega=\underline{\frac{12}{k+4}}\frac{v_0}{L}$，细杆质心 $v_C=\underline{\frac{2}{k+4}}v_0$ 和小球 $v=\underline{\frac{4-k}{k+4}}v_0$.	5 分
	(b) $M=3m$ 时 $\omega=\underline{12}$ rad/s, $v_C=\underline{2}$ m/s 和 $v=\underline{1}$ m/s; $v_A=\underline{-4}$ m/s 和 $v_B=\underline{8}$ m/s.	5 分
(2)	(a) 瞬时轴 $x=\underline{\frac{2}{3}}L$; 系统关于质心 $I_C=\underline{\frac{k(k+4)}{12(k+1)}}mL^2$, 转动 $\omega=\underline{\frac{6}{k+4}}\frac{v_0}{L}$ 和质心 $v_C=\underline{\frac{1}{k+1}}v_0$;	6 分
	撞击后 $E=\underline{\frac{4}{k+4}}E_0$. (b) $M=3m$ 时 $E=\underline{\frac{4}{7}}E_0$ 和 $m=3M$ 时 $E=\underline{\frac{12}{13}}E_0$.	4 分

23. (8 分)

(1)	飞船的运行速度 $v^2=\frac{GM}{r}$，动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$ 和总能量 $E=-E_k$.	3 分
(2)	飞船离开地球的最远距离 $r_{\max}=\frac{13}{7}r$.	5 分

24. (24 分)

(1)	(a)小球 m 摆动到 P 点时切线长度 $t(\varphi)=R\left(\underline{\frac{L}{R}-\varphi}\right)$;				7 分
	(b)下降高度 $h(\varphi)=R\left(1-\cos\varphi+\frac{t(\varphi)}{R}\sin\varphi\right)=R\left(\underline{\tan\frac{\varphi}{2}+\frac{L}{R}-\varphi}\right)\sin\varphi$;				
	(c)垂直于 PQ 方向的速度 $v^2(\varphi)=\underline{2gh(\varphi)}$和沿着 PQ 方向的加速度 $a(\varphi)=2g\underline{\frac{h(\varphi)}{t(\varphi)}}$.				
	(d)张力 $T(\varphi)=[\sin\varphi+2\underline{\frac{h(\varphi)}{t(\varphi)}}]$ 或 $T(\varphi)=\frac{2mgR}{t(\varphi)}(x_1-x_2)\sin\varphi$ 其中 $x_1=\tan\underline{\frac{\varphi}{2}}$ 和 $x_2=\underline{\frac{3}{2}(\varphi-\frac{L}{R})}$.				
	位置φ	切线长度 t	下降高度 h	小球速度 v	细绳张力 T	
(2)	$\varphi_i=\underline{\frac{1}{2}}\pi$	$h_i=\underline{5.3151}R$,	$h_i=\underline{6.3151}R$,	$v_i=\underline{3.5540}\sqrt{gR}$,	$T_i=\underline{3.3763}mg$;	6 分
(3)	$\varphi_i=\underline{\frac{9}{8}}\pi$	$t_{ii}=\underline{3.3516}R$,	$h_{ii}=\underline{0.6413}R$,	$v_{ii}=\underline{1.1325}\sqrt{gR}$,	$T_{ii}=\underline{0}$.	6 分
(4)	(a) 抛体运动 ; (b) $h_{iii}=\underline{0.0939}R$ 和 $v_{iii}=\underline{0.4334}\sqrt{gR}$.				5 分

II. 题目和解答

1. 自行车加速前进时，设地面作用在后轮上的摩擦力(a)方向向前; (b)方向向后，和地面作用在前轮上的摩擦力(1)方向向前; (2)为零; (3)方向向后，则正确的组合是

A. (a)和(1) B. (a)和(2) C. (a)和(3) D. (b)和(1) E. (b)和(2) F. (b)和(3)

答案：C 解答：

自行车加速前进时，后轮受链条转动力矩的作用，该力矩使后轮与地面相接触的那一点有向后运动的趋势，所以要使后轮不滑动，地面作用在它上面的静摩擦力的方向是向前的。当后轮的转动加速而使

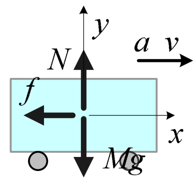
自行车加速前进时，车身推动前轮的力作用在前轮的轴上，该力使前轮与地面相接触的那一点有向前运动的趋势，所以要使前轮不滑动，地面作用在它上面的静摩擦力的方向是向后的。

2. 一辆汽车质量为 4,000kg，在水平路面上匀速行驶。从某个时刻关闭发动机，经过 10s 滑行 50m 而停止。车轮与地面间的动摩擦系数μ=

A. 0.6 B. 0.5 C. 0.4 D. 0.3 E. 0.2 F. 0.1

答案：F **解答：**已知M=4,000kg, t=10s, s=50m.

汽车的受力和运动图，如图所示：

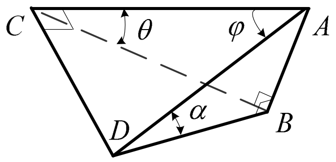


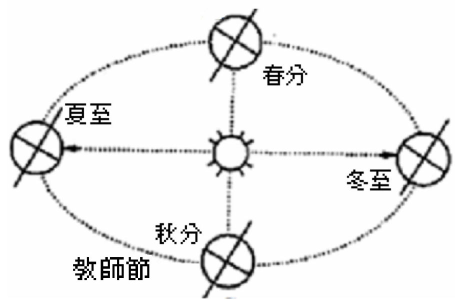
汽车关闭发动机后滑行的加速度 $a=2s/t^2=1\text{m/s}^2$;

$\Sigma F_y=N-Mg=0 \Rightarrow N=Mg$; $\Sigma F_x=ma, f=Ma \Rightarrow \mu N=\mu Mg=Ma \Rightarrow$ 动摩擦系数$\mu=a/g=$ <u>0.1</u>.

3. $\angle ABC$、$\angle ACD$ 和$\angle ABD$ 均为直角，并且角θ, φ和α分别是它们所在三角形直角边和斜边的夹角，则 $\sin\alpha$=

A. $\sin\theta\cos\varphi$ B. $\sin\theta\sin\varphi$ C. $\cos\theta\cos\varphi$ D. $\cos\theta\sin\varphi$ E. $\sin\theta/\cos\varphi$ F. $\sin\theta/\sin\varphi$





4. (续前)地球绕太阳公转，由夏至 6 月 21 日至教师节 9 月 10 日在公转轨道平面上转过的角度$\varphi\approx$

A. 55^0 B. 60^0 C. 65^0 D. 70^0 E. 75^0 F. 80^0

5. 地球赤道面与其绕太阳公转轨道平面的交角$\theta=23.5^0$，则在教师节日阳光相对于赤道面，照射的角度$\alpha\approx$

A. 2^0 B. 4^0 C. 6^0 D. 8^0 E. 10^0 F. 12^0

6. (续前)北京位于北纬$\beta=40^0$，在夏至那天白昼的时间为

7. (续前)北京在教师节那天白昼时间为 (单位：小时)

A. 10.05 B. 11.25 C. 12.45 D. 13.65 E. 14.85 F. 16.05

答案：A F B E C **解答：**

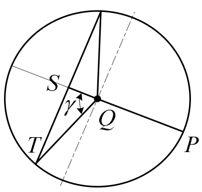
(1) $AB=AC\sin\theta=AD\sin\alpha$ 和 $AC=AD\cos\varphi \Rightarrow \sin\alpha=\boldsymbol{\sin\theta\cos\varphi}$.

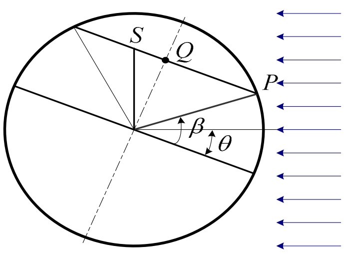
(2) 由 6 月 21 日夏至到 9 月 10 日教师节，地球在绕太阳的轨道平面上旋转 9+31+31+10=81 天

转过角度$\varphi=(81/365)\times360^0\approx79.89^0$.

(3) $\sin\alpha=\sin\theta\cos\varphi=\sin23.5^0\cos79.89^0=0.069242 \Rightarrow \alpha\approx3.97^0$.

(4) 设地球半径为 R, $PQ=R\cos\beta$, $QS=R\sin\beta\tan\alpha$. 北纬β横切面上 $\cos\gamma=\dfrac{QS}{QT}=\dfrac{R\sin\beta\tan\alpha}{R\cos\beta}=\tan\beta\tan\alpha$.





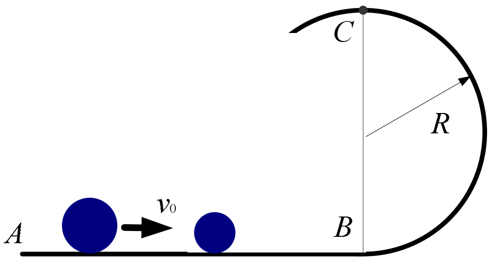
夏至日$\alpha=\theta=23.5^0$, $\cos\gamma=\tan40^0\tan23.5^0=0.36485 \Rightarrow \gamma=68.60^0$. 白昼时间$\dfrac{180-\gamma}{180}\times24=14.853$ 小时.

教师节当天$\alpha=3.97^0$, $\cos\gamma=\tan40^0\tan3.97^0=0.058234 \Rightarrow \gamma=86.66^0$. 白昼时间$\dfrac{180-\gamma}{180}\times24=12.445$ 小时.

日期	夏至 6 月 21 日	教师节 9 月 10 日	秋分 9 月 21 日	国庆节 10 月 1 日	……
地球公转天数 d=	91	81	92	102	
转过角度 $\varphi=(d/365)\times 360^0$=	89.753425	79.890411	90.739726	100.60274	
$\sin\alpha=\sin\theta\cos\varphi$=	0.001716	0.069993	−0.005147	−0.073369	
太阳对于赤道面照射角度 α=	23.5^0	4.0136^0	0.2949^0	-4.2075^0	
$\cos\gamma=\tan\beta\tan\alpha$=	0.36485	0.05888	0.00432	0.03173	
北纬 β 横切面上 γ=	68.6016^0	86.6247^0	89.7525^0	93.5391^0	
白昼时间 $(1-\gamma/180)\times 24$ 小时=	14.85	12.45	12.033	11.53	

8. AB 为一光滑水平直轨道，BC 是半径 R=8m 的半圆形光滑轨道，水平直轨道与半圆轨道连接在一起。在水平轨道上有两个球，大球的质量 M 为小球质量 m 的 2 倍即 $M=2m$，大球以速度 v_0 与撞击静止的小球，碰撞后大球速度减少为 $v_0/3$ 并且使小球升到轨道最高点 C，则 v_0 的最小值应为

A. 11m/s　　B. 12m/s　　C. 13m/s　　D. 14m/s　　E. 15m/s　　F. 16m/s



答案：E　　**解答：**(圆周运动、动量守恒定律和机械能守恒定律)

设小球 m 通过最高点 C 时轨道的支持力为 N，由牛顿定律 $N+mg=m\dfrac{v_C^{\,2}}{R} \Rightarrow N=m\dfrac{v_C^{\,2}}{R}-mg\geq 0 \Rightarrow v_C^2\geq gR$.

机械能守恒 $\dfrac{1}{2}mv_B^2=mg(2R)+\dfrac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B^2=4gR+v_C^2\geq 5gR \Rightarrow v_B\geq\sqrt{5gR}$.

动量守恒 $Mv_0=\dfrac{Mv_0}{3}+mv_B \Rightarrow \dfrac{2Mv_0}{3}=mv_B \Rightarrow \dfrac{4v_0}{3}=v_B \Rightarrow v_0=\dfrac{3}{4}v_B\geq\dfrac{3}{4}\sqrt{5gR}=\dfrac{3}{4}\sqrt{5\times 10\times 8}$ =15m/s.

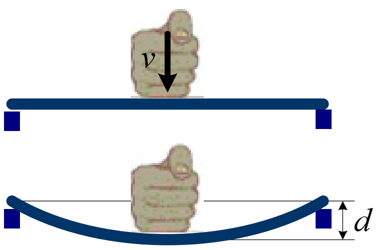
∴ 大球以 v_0 碰撞小球的最小值应为 15m/s.

9. 空手道运动员挥动质量 m_1=700g 的拳头，向下以速度 v 击断一块弯曲弹性常数 k=41kN/m 和质量 m_2=140g 的木板；折断偏转距离 d=16mm。在折断前木板所储存的能量 $E\approx$

A. 0.525 J　　B. 1.05 J　　C. 5.25 J　　D. 10.5 J　　E. 52.5 J　　F. 105 J

10. (续前)假设(i)拳头对木板的撞击可视为完全非弹性碰撞、(ii)木板在弯曲时机械能守恒和(iii)当折断时拳头及木板的速度为零，则拳头对木板的撞击速度 $v\approx$

A. 1.11m/s　　B. 1.34m/s　　C. 1.90m/s　　D. 4.24m/s　　E. 6.00m/s　　F. 13.41m/s



答案：C D　　**解答：**(弹性势能、动量守恒定律和机械能守恒定律)

(1) 在折断前木板所储存的弹性势能 $E_p=\dfrac{1}{2}kd^2=\dfrac{1}{2}\times 41\times 10^3\times(16\times 10^{-3})^2$ =<u>5.248 J</u>.

(2) 设 V 为拳头以速度 v 完全非弹性碰撞地撞击木板后的速度，则

机械能守恒，撞击木板后的动能 $E_k=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)V^2=E_p=E=5.248\text{J} \Rightarrow V=\sqrt{\dfrac{2E}{m_1+m_2}}$.

起初拳头向板进行完全非弹性碰撞，动量守恒 $m_1v=(m_1+m_2)V$

$$\Rightarrow v=\frac{m_1+m_2}{m_1}V=\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{\frac{2E}{m_1+m_2}}=\frac{\sqrt{2E(m_1+m_2)}}{m_1}=\frac{\sqrt{2\times 5.248\times(0.7+0.14)}}{0.7}\approx \underline{4.242\text{ m/s}}.$$

11. 质量 m=0.2kg 的物块 A 放置在一个弹簧刚度 k=50N/m 和质量 M=1kg 的振子 B 上，它们一起在光滑水平面上作简谐振动，A、B 之间的静摩擦系数μ=0.2。若要使物块 A 在振子 B 表面上不滑动，系统简谐振动的最大位移为(单位：mm)

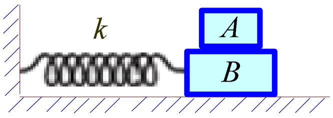
A. 30　B. 36　C. 42　D. 48　E. 54　F. 60

12. (续前)系统简谐振动的固有频率是 (单位：rad/s)

A. 6.45　B. 6.95　C. 7.45　D. 7.95　E. 8.45　F. 8.95

13. (续前)如果弹簧被压缩至 100mm 并且系统最初处于静止状态，物块 A 在振子 B 上滑动的时间约为

A. 0.017s　B. 0.167s　C. 0.517s　D. 0.777s　E. 1.00s　F. 1.67s



答案：**D A B**　　解答：

(1)　考虑系统 A+B 简谐振动$(M+m)a+kx=0 \Rightarrow a=\dfrac{kx}{M+m}$ 以及物块 A 不在振子 B 上滑动

则静摩擦力$\mu mg \geq f=ma=\dfrac{mkx}{m+M} \;\Rightarrow \mu g \geq \dfrac{kx}{m+M} \;\Rightarrow x \leq \mu\dfrac{m+M}{k}g = 0.2\times\dfrac{1.2}{50}\times 10 = 0.048\text{m}.$

∴　物块 A 不在振子 B 上滑动振动的最大位移 x_{max}=<u>48mm</u>.

(2)　简谐振动位移 $x(t)=x_0\cos(\omega t)$其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$ =<u>6.455rad/s</u>.

(3)　若 x_0=100mm，则 $x(t)$=100cos(6.455t) mm.

当静摩擦力 $f=\mu mg=ma=\dfrac{mkx(t)}{m+M}$ 时物块 A 在振子 B 上滑动 $\Rightarrow$ 位移 $x(t)$=48mm=100cos(6.455t)mm

$\Rightarrow$ cos(6.455t)=0.48 $\Rightarrow$ (6.455rad/s) t=61.31^0=1.0701rad $\Rightarrow$ 物块 A 在振子 B 上滑动的时间 t=<u>0.167s</u>.

14. 一个质量为 4M 及半径为 R 的均匀等厚度圆板，在等边ΔPAB 的角点 A 和 B 上各贴有一个质量为 M 的质点。设 C 为系统的质量中心，则 $d_{PC}=kR$，其中 k=

A. 8/7　B. 7/6　C. 6/5　D. 5/4　E. 4/3　F. 3/2

15. (续前)系统关于 P 点的转动惯量 $I_P=k_PMR^2$，其中 k_P=

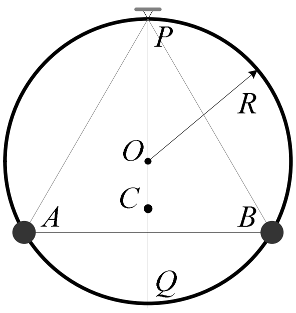
A. 12　B. 11　C. 10　D. 9　E. 8　F. 7

16. (续前)系统关于质量中心 C 的转动惯量 $I_C=k_CMR^2$，其中 k_C=

A. 23/10　B. 23/8　C. 23/6　D. 19/8　E. 19/6　F. 19/4

17. (续上题)将 P 端悬挂于天花板上，构成一个复合摆。系统简谐振动的频率$\omega^2=k_\omega(g/R)$，其中 k_ω=

A. 2/23　B. 1/4　C. 5/12　D. 7/12　E. 21/23　F. 42/23



答案：**B A C D**　　解答：

	m	y_P	d_P	$I_P=I_O+md_P{}^2$
均匀等厚度圆板 $PABCQ$	4M	R	R	$=(4M)R^2/2+(4M)R^2=6MR^2$
质点 A	M	3R/2	$\sqrt{3}R$	$=M(\sqrt{3}R)^2=3MR^2$
质点 B	M	3R/2	$\sqrt{3}R$	$=M(\sqrt{3}R)^2=3MR^2$
圆板+质点 A 和 B	6M		d_{PC}	(2) $6MR^2+3MR^2+3MR^2=\underline{12MR^2}$

(1)　$4M\times R+2M\times\dfrac{3}{2}R=6M\times d_{PC} \Rightarrow d_{PC}=\underline{\dfrac{7}{6}}R.$

(3)　$I_P=I_C+m(d_{PC})^2$, $12MR^2=I_C+6M(\dfrac{7}{6}R)^2 \Rightarrow I_C=\underline{\dfrac{23}{6}}MR^2.$

(4)　$\omega^2=\dfrac{mgl}{I}=\dfrac{(6M)g(7R/6)}{12MR^2}=\underline{\dfrac{7}{12}}\dfrac{g}{R}.$

18. 质量为 1kg 的木块 A 放在液体中时，浮在液面上的部份刚好是整个体积的 2/3。
把体积与 A 相同的重物 B 放在木块上面，A 和 B 全部没入液体中，则重物 B 的最小质量为

A. 1kg　B. 2kg　C. 3kg　D. 4kg　E. 5kg　F. 6kg

答案：**E**　解答：（液体的浮力）

设液体、木块 A 和物体 B 的密度分别为 ρ, ρ_1 和 ρ_2.

又设木块 A 和物体 B 的体积为 V, 则质量分别为 $m_1=\rho_1 V$ 和 $m_2=\rho_2 V$. 液体的浮力等于

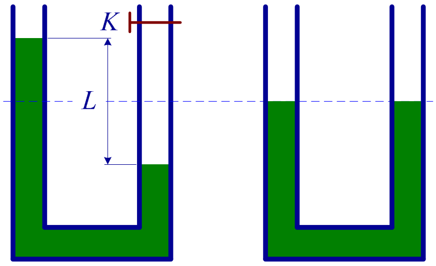
木块 A 排开液体的重量 $\rho(1-\frac{2}{3})Vg=\rho_1 Vg \Rightarrow \rho=3\rho_1$ 和木块 A 和物体 B 排开液体的重量

$\rho(2V)g=(\rho_1+\rho_2)Vg \Rightarrow (3\rho_1)(2V)=\rho_1 V+\rho_2 V \Rightarrow 6m_1=m_1+m_2 \Rightarrow m_2=5m_1=5\text{kg}.$

19. 横截面均匀的 U 形管装有总长为 $3L$ 的液体，开始时阀门闭合，左右支管内液面高度差为 L。
打开阀门后，若左右液面高度相同时液体的流动速度为 v(管内部摩擦阻力忽略不计)并且 $v^2=gL/k$，则 $k=$

20. (续前)左右液面高度相同之后，液体高度开始振荡。设固有频率为ω并且$\omega^2=k(g/L)$，则 $k=$

A. 4/3　B. 1　C. 2/3　D. 1/2　E. 1/3　F. 1/6



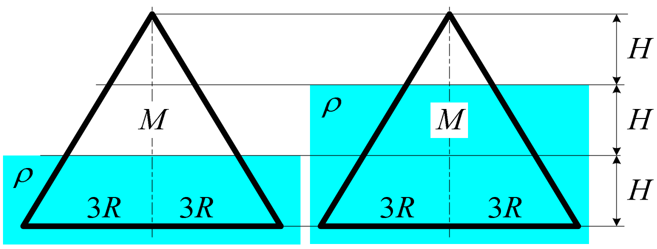
答案：**F C**　解答：

(1) 整个液体柱机械能守恒: 左管长度为 $L/2$ 及质量为 m 液体柱的重力势能转变为整体长度 $3L$ 及质量 $6m$ 液体柱的流动动能, 即 $mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}(6m)v^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{gL}{6}}$.

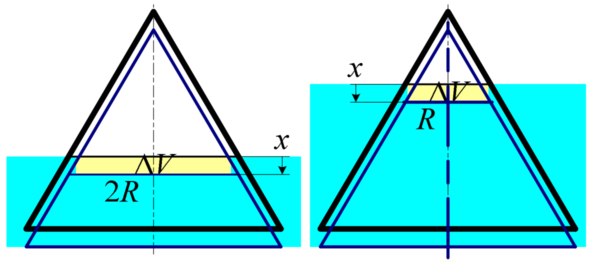
(2) 静止 U 型管内液体受到微小干扰 x 后振荡的回复力 $F=-\rho g(2x)A=ma$

$\Rightarrow -\rho g(2x)A=\rho A(3L)a \Rightarrow 3La+2gx=0 \Rightarrow$ 角频率 $\omega^2=\frac{2g}{3L}$.

21. (8分)
在密度为ρ的液体中，静止地浸有密度为P及质量为 M 的底面半径为 $3R$ 和高度为 $3H$ 的圆锥体，液体分别浸到它的 1/3 和 2/3 高度处。试分别求出这二种情况下
圆锥体(a)与液体的密度之比P/ρ，(b)质量 M 和(c)受到微小干扰后的振荡频率ω^2。



解答：



圆锥体积 $V_0=\frac{\pi}{3}(3R)^2(3H)=9\pi R^2 H$，则圆锥体质量 $M=PV_0=P(9\pi R^2 H)$和重量 $G=Mg=PV_0 g$.

液体对物体的浮力 $f=\rho Vg$ 其中 V 为浸在液体内体积.

由阿基米得定理 $f=G$ 即$\rho gV=PV_0 g \Rightarrow PV_0=\rho V \Rightarrow$ 密度之比$\frac{P}{\rho}=\frac{V}{V_0}$.

	液体浸到圆锥高度的	1/3	2/3
平衡时	浸在液体内体积 $V=$	$(9-\frac{8}{3})\pi R^2 H=\frac{19}{3}\pi R^2 H$	$(9-\frac{1}{3})\pi R^2 H=\frac{26}{3}\pi R^2 H$
	密度比$\frac{P}{\rho}=\frac{V}{V_0}=$	$\frac{19}{27}$	$\frac{26}{27}$
	质量 $M=PV_0=\rho V=$	$\frac{19}{3}\rho\pi R^2 H$	$\frac{26}{3}\rho\pi R^2 H$

向下微小位移x后	浸在液体内体积变化ΔV=	$\pi(2R)^2x=4\pi R^2x$	πR^2x
	合力$\Sigma F=-(\rho\Delta V)g=Ma$	$-\rho(4\pi R^2x)g=(\frac{19}{3}\rho\pi R^2H)a$	$-\rho(\pi R^2x)g=(\frac{26}{3}\rho\pi R^2H)a$
	$a+\omega^2x=0$，其中振荡频率ω^2=	$a+\frac{12g}{19H}x=0$，其中$\omega^2=\underline{\frac{12g}{19H}}$	$a+\frac{3g}{26H}x=0$，其中$\omega^2=\underline{\frac{3g}{26H}}$

22. (20 分)

质量为 M 和长度为 L 的均匀细杆 AB 静止在光滑水平面上，质量为 m 的小球以初速度 v_0 垂直地撞击右端点 B。设 (i)参数 k 为质量比即 $M=km$；(ii)瞬时转动轴(即静止点)P 到 B 端的距离为 x。

(1) C 为杆的中心点，球对杆的撞击是「完全弹性碰撞」。试求撞击后瞬时

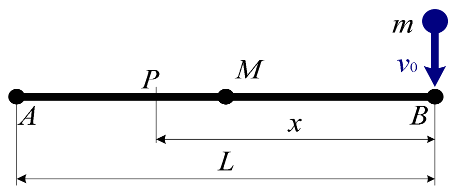
(a)瞬时轴位置 x；(b)细杆的转动角速度ω、质心速度 v_C 和小球的速度 v；

(c)当杆长 L=1m、球初速度 v_0=7m/s 和质量 $M=3m$ 时，计算杆的角速度ω、质心速度 v_C 和小球的速度 v。

(2) O 为杆的中心点，球对杆的撞击是「完全非弹性碰撞」。试求撞击后瞬时

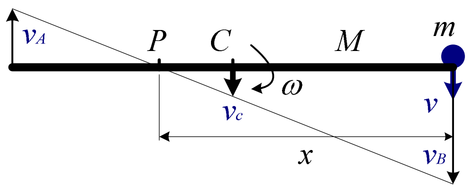
(a) 瞬时轴位置 x； (b) 系统关于质心 C 的转动惯量 I_C、转动角速度ω、质心速度 v_C 和动能 E；

(c) 计算当质量 $m=3M$ 时，系统在撞击后的能量 E 与撞击前的能量 $E_0=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$ 的比值。

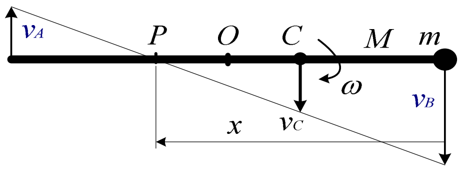


解答：

(1)



图(1)



图(2)

(a) 以瞬时轴P为参考点 平行轴定理 $I_P=I_C+M(x-\frac{L}{2})^2=\frac{ML^2}{12}+M(x-\frac{L}{2})^2$.　　(i)

小球撞击细杆前和后动量守恒$mv_0=mv+M\omega(x-\frac{L}{2})$

和角动量守恒$(mv_0)x=(mv)x+I_P\omega\Rightarrow M\omega(x-\frac{L}{2})x=I_P\omega$　　(ii)

式(i)代入(ii)有 $M(x-\frac{L}{2})x=I_P=\frac{ML^2}{12}+M(x-\frac{L}{2})^2$，解得$x=\underline{\frac{2}{3}}L$.

(b) $x=\frac{2}{3}L$代入(i)有 $I_P=\frac{ML^2}{12}+M(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})L^2=\frac{ML^2}{12}+M[(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})L]^2=\frac{ML^2}{9}$ 和$v_C=\omega(x-\frac{L}{2})=\frac{L\omega}{6}$.　　(iii)

$x=\frac{2}{3}L$代入动量守恒式并且$M=km$有 $v_0=v+k\frac{L\omega}{6}=v+kv_C$.

小球撞击细杆前和后能量守恒 $\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_P\omega^2\ \Rightarrow\ v_0^{\ 2}=v^2+k\frac{(L\omega)^2}{9}$　　(iv)

式(iii)代入(iv)得到$\omega=\frac{12}{k+4}\cdot\frac{v_0}{L}$　　(v)

式(v)代入(iii)得到 $v_C=\frac{1}{6}L\omega=\frac{2}{k+4}v_0$ 和 $v=v_0-kv_C=\frac{4-k}{k+4}v_0$.

(c) L=1m, v_0=7m/s和k=3

角速度$\omega=\frac{12}{3+4}\cdot\frac{7}{1}$=12rad/s，质心速度$v_C=\frac{2}{3+4}\times7$=2m/s和小球速度$v=\frac{4-3}{3+4}\times7$=1m/s.

$v_B=v_C+\omega\frac{L}{2}$=2+12×0.5=8m/s 和 $v_A=v_C-\omega\frac{L}{2}$=2−12×0.5=−4m/s.

附表1

撞击后 \ 质量$k=\frac{M}{m}=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
杆角速度$\frac{\omega}{v_0/L}=\frac{12}{k+4}=$	$\frac{36}{13}$	$\frac{24}{9}$	$\frac{12}{5}$	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
杆质心速度$\frac{v_C}{v_0}=\frac{2}{k+4}=$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$
小球速度$\frac{v}{v_0}=\frac{4-k}{k+4}=$	$\frac{7}{13}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$

(2)

(a) 以杆中心轴O为参考点：小球撞击细杆前和后的

动量守恒$mv_0=m(\omega x)+M\omega(x-\frac{L}{2})$和角动量守恒$(mv_0)\frac{L}{2}=m(\omega x)\frac{L}{2}+I_O\omega$,其中$I_O=\frac{ML^2}{12}$.

以上二式联立，解得$x=\underline{\frac{2}{3}L}$和$\omega=\underline{\frac{6}{k+4}\frac{v_0}{L}}$.

设小球撞击细杆后系统的质量中心为C，则 $l_{OC}=\frac{m}{M+m}\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{L}{2}$ 和 $l_{CB}=\frac{M}{M+m}\cdot\frac{L}{2}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{L}{2}$.

系统关于质心C的转动惯量$I_C=I_O+M(l_{OC})^2+m(l_{CB})^2=\frac{ML^2}{12}+M(\frac{1}{k+1}\cdot\frac{L}{2})^2+m(\frac{k}{k+1}\cdot\frac{L}{2})^2=\frac{k(k+4)}{12(k+1)}mL^2$.

撞击前和撞击后的动量守恒$mv_0=(M+m)v_C \Rightarrow v_0=(k+1)v_C \Rightarrow v_C=\frac{v_0}{k+1}$.

关于质心C的角动量守恒 $(mv_0)l_{CB}=I_C\omega$ 即 $(mv_0)\frac{k}{k+1}\cdot\frac{L}{2}=[\frac{k(k+4)}{12(k+1)}mL^2]\omega \Rightarrow \omega=\frac{6}{k+4}\frac{v_0}{L}$.

撞击前的能量$E_0=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$ 和撞击后的能量$E=\frac{1}{2}(M+m)v_C^{\ 2}+\frac{1}{2}I_C\omega^2$

$$=\frac{1}{2}(k+1)m(\frac{v_0}{k+1})^2+\frac{1}{2}(\frac{k(k+4)}{12(k+1)}mL^2)(\frac{6v_0}{(k+4)L})^2=(\frac{1}{k+1}+\frac{k}{k+1}\frac{3}{k+4})E_0=\underline{\frac{4}{k+4}}E_0.$$

(b) $M=3m$, $E=4/7E_0\approx0.57E_0$. 和 $m=3M$, $E=12/13E_0\approx0.92E_0$.

附表2

质量比 $k=\frac{M}{m}=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
系统质心C: $l_{OC}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{L}{2}=$	$\frac{3}{8}L$	$\frac{1}{3}L$	$\frac{1}{4}L$	$\frac{1}{6}L$	$\frac{1}{8}L$	$\frac{1}{10}L$	$\frac{1}{12}L$
至右端 $l_{CB}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{L}{2}=$	$\frac{1}{8}L$	$\frac{1}{6}L$	$\frac{1}{4}L$	$\frac{1}{3}L$	$\frac{3}{8}L$	$\frac{2}{5}L$	$\frac{5}{12}L$
至左端 $l_{AC}=\frac{k+2}{k+1}\cdot\frac{L}{2}=$	$\frac{7}{8}L$	$\frac{5}{6}L$	$\frac{3}{4}L$	$\frac{2}{3}L$	$\frac{5}{8}L$	$\frac{3}{5}L$	$\frac{7}{12}L$
转动惯量$\frac{I_C}{mL^2}=\frac{k(k+4)}{12(k+1)}=$	$\frac{13}{144}$=0.09	$\frac{1}{8}$=0.125	$\frac{5}{24}$=0.21	$\frac{1}{3}$=0.33	$\frac{7}{16}$=0.44	$\frac{8}{15}$=0.53	$\frac{15}{24}$=0.625
系统角速度$\frac{\omega}{v_0/L}=\frac{6}{k+4}=$	$\frac{18}{13}$=1.38	$\frac{4}{3}$=1.33	$\frac{6}{5}$=1.20	1.00	$\frac{6}{7}$=0.86	$\frac{3}{4}$=0.75	$\frac{2}{3}$=0.67
系统质心速度$\frac{v_C}{v_0}=\frac{1}{k+1}=$	$\frac{3}{4}$=0.75	$\frac{2}{3}$=0.67	$\frac{1}{2}$=0.50	$\frac{1}{3}$=0.33	$\frac{1}{4}$=0.25	$\frac{1}{5}$=0.20	$\frac{1}{6}$=0.17
撞击后的能量$\frac{E}{E_0}=\frac{4}{k+4}=$	$\frac{12}{13}$=0.92	$\frac{8}{9}$=0.89	$\frac{4}{5}$=0.80	$\frac{2}{3}$=0.67	$\frac{4}{7}$=0.57	$\frac{1}{2}$=0.5	$\frac{4}{9}$=0.44

23. (8 分)

(1) 飞船围绕地球运行，圆形轨道半径为 r、地球质量为 M 和飞船为 m，试求飞船圆周运动的动能 E_k 和总能量 E。

(2) 将飞船点火加速，瞬间将其动能增加为 $1.3E_k$。试求飞船离开地球的最远距离 $r_{\max}$。

解答：

(1) 牛顿定律 $\dfrac{GMm}{r^2}=\dfrac{mv^2}{r}$ $\Rightarrow$ 飞船的运行$v^2=\dfrac{GM}{r}$ 和动能$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}$.

飞船的的总能量$E=E_k+E_p=\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}-\dfrac{GMm}{r}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}=-E_k$.

(2) (解法1)

飞船点火后在瞬间其动能增加为$1.3E_k=\dfrac{13}{20}\dfrac{GMm}{r}$ $\Rightarrow$ 点火后速度 $\sqrt{1.3}\,v$.

飞船的的总能量 $\dfrac{13}{20}\dfrac{GMm}{r}-\dfrac{GMm}{r_0}=-\dfrac{7}{20}\dfrac{GMm}{r_0}$.

角动量守恒 $(mv)r=(mv_x)r_x \Rightarrow (\sqrt{1.3}\,v)r=v_xr_x \Rightarrow$ 飞船在椭圆轨道上运行时的速度$v_x=(\sqrt{1.3}\dfrac{r}{r_x})v$.

能量$E_x=\dfrac{1}{2}mv_x{}^2-\dfrac{GMm}{r_x}=\dfrac{1}{2}m[v^2\cdot 1.3(\dfrac{r}{r_x})^2]-\dfrac{GMm}{r_x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}[1.3(\dfrac{r}{r_x})^2]-\dfrac{GMm}{r_x}=\dfrac{13}{20}\dfrac{GMm}{r}(\dfrac{r}{r_x})^2-\dfrac{GMm}{r_x}$.

能量守恒$E=E_x$ 即$-\dfrac{7}{20}\dfrac{GMm}{r}=\dfrac{13}{20}\dfrac{GMm}{r}(\dfrac{r}{r_x})^2-\dfrac{GMm}{r_x}\Rightarrow \dfrac{13}{20}\dfrac{GMm}{r}(\dfrac{r}{r_x})^2-\dfrac{GMm}{r_x}+\dfrac{7}{20}\dfrac{GMm}{r}=0$

$\Rightarrow 7r_x{}^2-20r_xr+13r^2=0$. 解$r_x$关于$r$的二次方程$r_x=\dfrac{20r\pm\sqrt{(20r)^2-4\times7\times13r^2}}{2\times7}=r$或$\dfrac{13}{7}r$.

飞船离开地球的最远距离$r_{\max}=\dfrac{13}{7}r$.

(解法2)

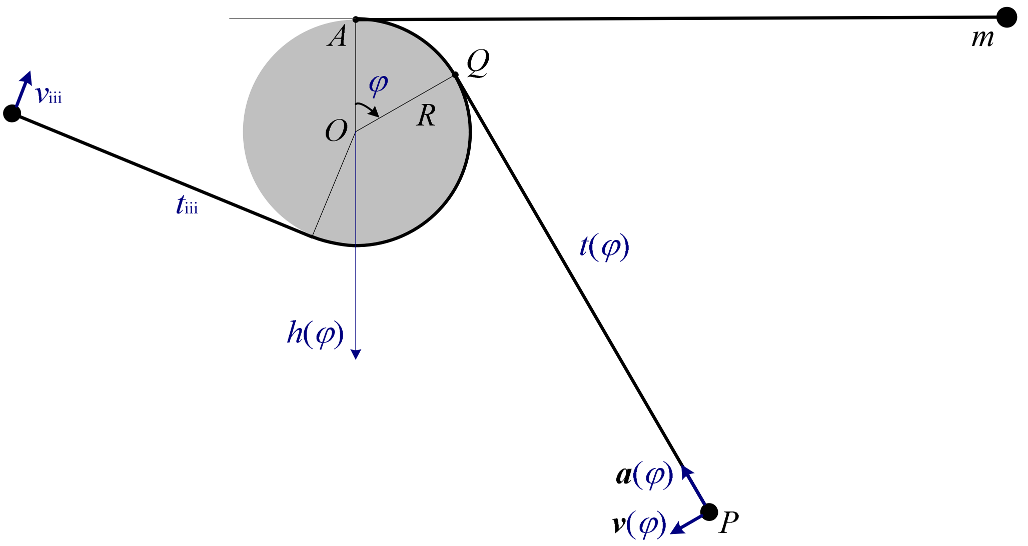
飞船加速前在椭圆轨道的总能量$E=E_k+E_p=-E_k=-\dfrac{GMm}{2r}$; (i)

点火后瞬时在椭圆轨道的总能量$E=1.3E_k+E_p=-\dfrac{GMm}{2x}$. (ii)

式(ii)−(i) 有 $\dfrac{3}{10}E_k=E_k-\dfrac{GMm}{2x}\Rightarrow\dfrac{7}{10}E_k=\dfrac{GMm}{2x}\Rightarrow\dfrac{7}{10}\dfrac{GMm}{2r}=\dfrac{GMm}{2x}\Rightarrow$ 半长轴$x=\dfrac{10}{7}r$.

椭圆长轴$2x=\dfrac{20}{7}r=r_{\min}+r_{\max}=r+r_{\max}\Rightarrow r_{\max}=\dfrac{13}{7}r$.

24. (24分)



长度为 L 的水平细绳(不计质量和不可伸长)，右端有一个质量为 m 的小球，左端系在半径为 R 和圆心为 O 的固定在圆柱体顶端的 A 点上。

(1) 静止的小球 m 被释放后，绕圆柱体摆动到 P 点时摆线与圆柱体在 Q 点相切，设切线 PQ 长度为 t 和圆心角 AOQ 为 $\varphi(0\le\varphi\le\varphi_{ii})$。试(a) 以变量$\varphi$，表示切线长度 $t(\varphi)$；(b) 以变量 $t(\varphi)$，表示摆球在竖直方向的位移(下降高度) $h(\varphi)$; (c) 以变量 $h(\varphi)$，表示摆球在垂直于 PQ 方向的速度 $v(\varphi)$和沿着 PQ 方向的加速度 $a(\varphi)$。(d) 以正弦函数 $\sin\varphi$、变量 $t(\varphi)$和 $h(\varphi)$，表示小球摆动到 P 点时细绳的张力 T。

以下设 $\frac{L}{R}=\theta-\frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2}$ 其中 $\theta=\frac{9\pi}{8}\approx3.5343$，则 $\frac{L}{R}\approx3.5343-\frac{2}{3}\times(-5.0273)=6.8858$。

(2) 试计算小球摆动到最低点时的位置φ_i，及其切线长度 t_i、下降高度 h_i、速度 v_i 和细绳张力 T_i。

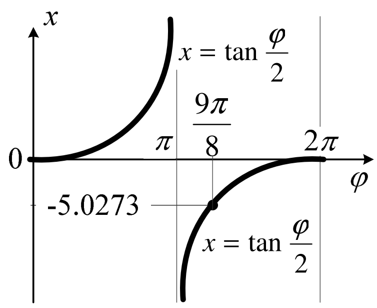
(3) 试求小球摆动到圆柱体左侧当切线长度 $t(\varphi)$最短时的位置φ_{ii}，及其下降高度 h_{ii}、速度 v_{ii} 和细绳张力 T_{ii}。

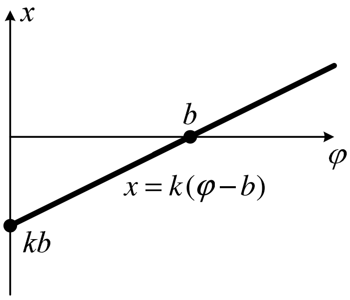
(3) 试确定小球摆动到圆柱体左侧当直线段 PQ 即切线 $t(\varphi)$长度最短时的位置φ_{iii}，及其切线长度 t_{iii}、下降高度 h_{iii}、速度 v_{iii} 和细绳张力 T_{iii}。

(4) 试确定小球 m 在题(3)位置φ_{ii} 之后继续运动的

(a)运动类型(直线运动/圆周运动/抛体运动/简谐振动)；(b)运动到最高点时的下降高度 h_{iv} 和瞬时速度 v_{iv}。

若有需要，可以(i)使用半角公式 $\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$; (ii)参考图形:





解答：

(1) 若小球摆动时细绳一直被拉紧，摆球动到 P 点时

(a) $L=MA=$直线 $PQ+$弧线 $QA=t+R\varphi\Rightarrow t$ 和φ的关系 $t(\varphi)=L-R\varphi=R(\frac{L}{R}-\varphi)$;

(b) 下降高度

$$h(\varphi)=R(1-\cos\varphi)+t(\varphi)\sin\varphi=R[(1-\cos\varphi)+\frac{t(\varphi)}{R}\sin\varphi]=R[\tan\frac{\varphi}{2}+\frac{t(\varphi)}{R}]\sin\varphi=R(\frac{L}{R}+\tan\frac{\varphi}{2}-\varphi)\sin\varphi,$$

(c) 机械能守恒 $mgh(\varphi)=\frac{1}{2}mv^2(\varphi)$

$\Rightarrow$ 垂直于 PQ 方向的速度 $v^2(\varphi)=2gh(\varphi)$和沿着 PQ 方向的加速度 $a(\varphi)=2g\frac{h(\varphi)}{t(\varphi)}$.

(d) 牛顿定律$\Sigma F=ma\Rightarrow T-mg\sin\varphi=ma(\varphi)\Rightarrow$ 细绳的张力 $T(\varphi)=m[g\sin\varphi+a(\varphi)]=mg[\sin\varphi+\frac{2h(\varphi)}{t(\varphi)}]$;

或者 $T(\varphi)=mg[1+\frac{2R}{t(\varphi)}(\tan\frac{\varphi}{2}+\frac{t(\varphi)}{R})]\sin\varphi=mg[3+\frac{2R}{t(\varphi)}\tan\frac{\varphi}{2}]\sin\varphi=\frac{2mgR}{t(\varphi)}(x_1-x_2)\sin\varphi$,

其中 $x_1=\tan\frac{\varphi}{2}$ 和 $x_2=\frac{3}{2}(\varphi-\frac{L}{R})$.

(2) 设 $\frac{L}{R}=\theta-\frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2}$ 其中 $\theta=\frac{9\pi}{8}$ 即 $\frac{L}{R}\approx\frac{9\pi}{8}-\frac{2}{3}\times(-5.02734)=6.88585$，则

切线长度 $t(\varphi)=R(6.88585-\varphi)$和下降高度 $h(\varphi)=R(1-\cos\varphi)+t(\varphi)\sin\varphi=R(6.88585+\tan\frac{\varphi}{2}-\varphi)\sin\varphi$.

$\varphi_i=\frac{\pi}{2}$: 摆线长度 $t_i=t(\frac{\pi}{2})\approx5.315R$，下降高度 $h_i=h(\frac{\pi}{2})=R(6.88585+\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}\approx\underline{6.315R}$,

$v_i^2=v^2(\frac{\pi}{2})=2gh_i=12.630gR\Rightarrow$ 最大速度$=3.554\sqrt{gR}$ 和

$$\text{细绳张力 } T_{\rm i}=T(\frac{\pi}{2})=mg[\sin\frac{\pi}{2}+\frac{2h_{\rm i}}{t_{\rm i}}]=mg(1+\frac{2\times6.315}{5.315})=\underline{3.3763}mg.$$

$\varphi_{\rm ii}=\pi$. 摆线长度 $t_{\rm i}=t(\pi)\approx\underline{3.744}R$, 下降高度 $h_{\rm i}=h(\pi)=R(1-\cos\pi)+t_{\rm i}\sin\pi=\underline{2}R$,

$v_{\rm ii}^2=v^2(\pi)=2gh_{\rm ii}=4gR\Rightarrow$ 小球速度 $v_{\rm ii}=\underline{2}\sqrt{gR}$ 和细绳张力 $T_{\rm i}=T(\pi)=mg[\sin\pi+\frac{2h_{\rm i}}{t_{\rm i}}]=mg(\frac{2\times2}{3.744})=\underline{1.0684}mg$.

(3) 小球摆动到圆柱体左侧当直线段 PQ 长度最短瞬时细绳张力 $T_{\rm iii}=0$

$$\text{即 } x_1=x_2\Rightarrow\ \tan\frac{\varphi_{\rm iii}}{2}=\frac{3}{2}(\varphi_{\rm iii}-\frac{L}{R})\ \Rightarrow\varphi_{\rm iii}=\theta=\frac{9\pi}{8}.$$

此时 $t_{\rm iii}=R(\frac{L}{R}-\theta)=R(\theta-\frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2}-\theta)=(-\frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2})R=-\frac{2}{3}\times(-5.02734)R=\underline{3.3516}R$,

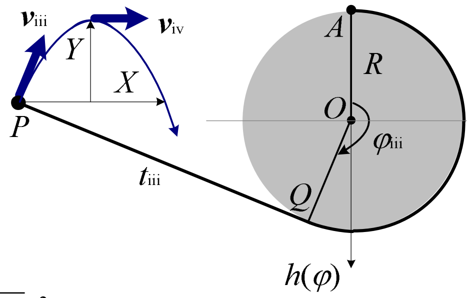
下降高度 $h_{\rm iii}=h(\theta)=R(\frac{L}{R}+\tan\frac{\theta}{2}-\theta)\sin\theta=R(\theta-\frac{2}{3}\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}-\theta)(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})=R(\frac{2}{3}\sin^2\frac{\theta}{2})$

$$=R(\frac{2}{3}\sin^2\frac{9\pi}{16})=\underline{0.6413}R\ \text{ 和 } v_{\rm iii}^2=2gh_{\rm iii}=1.2826gR.$$

小球摆动到圆柱体右侧当直线段 QP 长度最短时刻的瞬时速度 $v_{\rm iii}\approx1.1325\sqrt{gR}$.

(4) 小球在 P 点以速度 $v_c=1.1325\sqrt{gR}$ 和倾角 $\phi=\frac{3\pi}{2}-\theta=\frac{3\pi}{8}=67.5^0$ 的斜抛运动.

小球在圆柱体左侧最高点时刻的瞬时速度 $v_{\rm iv}=v_{\rm iii}\cos\phi=0.4334\sqrt{gR}$.



水平射程 $X=\frac{v_{\rm iii}^{\ 2}}{g}\sin2\phi=\frac{(1.1325\sqrt{gR})^2}{g}\sin2(67.5^0)=0.9069R$;

竖直射高 $Y=\frac{(v_{\rm iii}\sin\phi)^2}{2g}=\frac{(1.1325\sqrt{gR}\sin67.5^0)^2}{2g}=0.5474R$.

下降高度 $h_{\rm iv}=h_{\rm iii}-Y=(0.6413-0.5474)R=\underline{0.0939}R$.

$$\text{或 } mgh_{\rm iv}=\frac{1}{2}mv_{\rm iv}^2\Rightarrow h_{\rm iv}=\frac{v_{\rm iv}^{\ 2}}{2g}=\frac{(0.4334\sqrt{gR})^2}{2g}=\underline{0.0939}R.$$

附录：水平位移 $x(\varphi)$和下降高度 $h(\varphi)$、小球速度 v 和细绳的张力 T.

$\varphi=$	切线长度 $\frac{t(\varphi)}{R}=\frac{L}{R}-\varphi=6.8859-\varphi$	水平位移 $\frac{x(\varphi)}{R}=\sin\varphi+\frac{t}{R}\cos\varphi$	下降高度 $\frac{h(\varphi)}{R}=1-\cos\varphi+\frac{t}{R}\sin\varphi$	$v^2(\varphi)=2gh(\varphi)$ 小球速度 $\frac{v^2(\varphi)}{gR}=$	细绳的张力 $\frac{T(\varphi)}{mg}=3\sin\varphi+4\frac{R}{t}\sin^2\frac{\varphi}{2}$
0	=6.8859	=6.8859	=0	=0	=0
$\frac{\pi}{2}=1.5708$	=5.3151	=1	$=1+\frac{t}{R}=6.3151$	=12.6302	=3.3763
$\pi=3.1416$	=3.7443	$-\frac{t}{R}=-3.7443$	=1−(−1)=2	=4	=1.0683
$\theta=\frac{9\pi}{8}=202.5^0$ =3.5343	=3.3516	=−3.4819	=0.6413	=1.2826	=0