







香港物理奧林匹克委員會主辦 香港科技大學高等研究院贊助
第16屆泛珠三角物理奧林匹克暨中華名技邀請賽力學基礎試 試題

(2020年8月8日9:30-12:30)

* 選擇題1至16(答案唯一共32分)和簡答題17至20(共68分), 做在答題紙上*

** 若有需要可以取重力加速度 $g=10\text{m/s}^2$ **

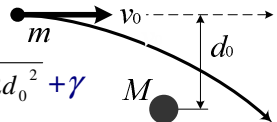
1. 图标某人做不同类型运动的速度向量 v 和加速度向量 a 。哪种情况下此人放慢速度并向右转?

- A.  B.  C.  D.  E.  F. 

2. 一质量为 m 的无动力飞船以初速度 v_0 从远处飞向一质量为 $M (>> m)$ 的行星。如果行星周围不存在引力场, 飞船会在离行星最近距离 d_0 处以直线航线飞过(如图中虚线所示)。

设 $\gamma = GM/v_0^2$, 飞船实际离行星最近的距离为(飞船的实际航线如实线所示)

- A. $\sqrt{\gamma^2 + d_0^2} - \gamma$ B. $\sqrt{\gamma^2 + d_0^2}$ C. $\sqrt{\gamma^2 + d_0^2} + \gamma$ D. $\sqrt{\gamma^2 + 2d_0^2} - \gamma$ E. $\sqrt{\gamma^2 + 2d_0^2}$ F. $\sqrt{\gamma^2 + 2d_0^2} + \gamma$



3. (续上题)当飞船飞过并远离行星后的最终速率是

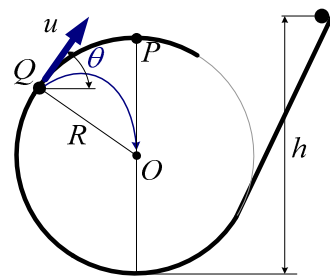
- A. $2v_0$ B. $5v_0/3$ C. $3v_0/2$ D. $4v_0/3$ E. v_0 F. $3v_0/4$

4. 一质量为 m 的滑块, 静止在轨道上距离地面高度为 h 处, 其下端是半径为 R 的圆形轨道, 问题中所有摩擦力忽略不计。若滑块能够到达圆形轨道的最高点 P , 则初始高度的最小值 $h_{\min} =$

- A. $1.577R$ B. $1.866R$ C. $2.25R$ D. $2.5R$ E. $3.0R$ F. $3.5R$

5. (续上题)当 $h < h_{\min}$ 时, 滑块会在轨道上某点 Q 离开轨道做斜抛运动, 并且击中圆心 O 点。设滑块在 Q 点做斜抛运动的速度 $k\sqrt{gR}$ 和倾斜角为 θ , 则 k 和 θ 为

- A. 0.84 和 45.0° B. 0.80 和 50.8° C. 0.76 和 54.7°
 D. 0.73 和 57.7° E. 0.71 和 60.0° F. 0.70 和 61.5°

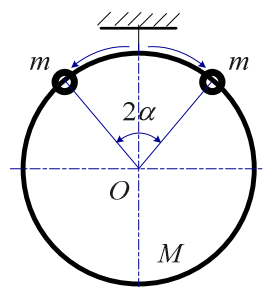


6. (续上题)若滑块最后击中 O 点, 其在轨道上初高度 $h =$

- A. $1.577R$ B. $1.866R$ C. $2.25R$ D. $2.5R$ E. $3.0R$ F. $3.5R$

7. 一质量为 M 的光滑大圆环用细绳挂在天花板上。两个质量同为 m 的小圆圈从环顶由静止开始同时向两边下滑, 已知质量比 $K = M/m$ 。当细绳张力 $T=0$ 时圆圈位置 θ 的余弦函数 $x = \cos\theta$ 满足方程

- A. $4x^2 - 6x + K = 0$ B. $4x^2 + 6x - K = 0$ C. $3x^2 - 2x + K = 0$
 D. $3x^2 + 2x - K = 0$ E. $6x^2 - 4x + K = 0$ F. $6x^2 + 4x - K = 0$



8. (续上题)参量 K 的取值范围为

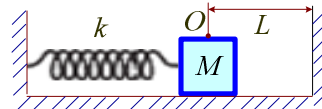
- A. $0 < 3K \leq 1$ B. $0 < 2K \leq 1$ C. $0 \leq 3K \leq 2$ D. $0 < K \leq 1$ E. $0 < 2K \leq 3$ F. $0 < K \leq 2$

9. (续上题)当小圆圈的质量 m 是大圆环质量 M 的 2 倍且细绳张力 $T=0$ 时, 圆圈位置 $\theta =$

- A. 48° B. 51.5° C. 55° D. 60° E. 70.5° F. 84.4°

10. 刚度 $k=50\text{N/m}$ 和质量 $M=2\text{kg}$ 的弹簧振子在光滑水平面上往复运动。当 $t=0$ 时振子处于平衡位置 O 并以速度 $v_0=5\text{m/s}$ 向右运动。现有另一座墙, 到原点 O 的距离为 $L=50\text{cm}$ 。若振子与墙的撞击是完全弹性碰撞, 则振子首次回到原点 O 的时间为

- A. 0.052s B. 0.104s C. 0.157s D. 0.209s E. 0.262s F. 0.314s



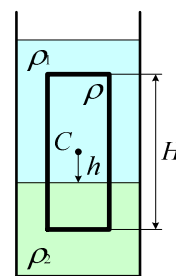
(题 11 和 12 的选项同在 12 题之后)高度为 H 和横截面积为 A 的均匀柱体, 悬浮在液体中。

11. 分层液体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$)。当柱体保持平衡时,

设其质量中心 C 与分层液体接口的距离 $h = kH$, 则 $k =$

12. (续题 11)设柱体受到微小干扰后的振荡频率 $\omega^2 = k(g/H)$, 则 $k =$

- A. $\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho}{2(\rho_2 - \rho_1)}$ B. $\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho}{2(\rho_2 + \rho_1)}$ C. $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho}$ D. $\frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\rho}{2(\rho_2 - \rho_1)}$ E. $\frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho}$ F. $\frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho}$



(题 13 至 16 的选项同在 16 题之后)在密度为 ρ 的液体中, 静止地浸有密度为 P 及质量为 M 的高度为 H 、底面半径为 $2R$ 和 R 的倒立圆台。

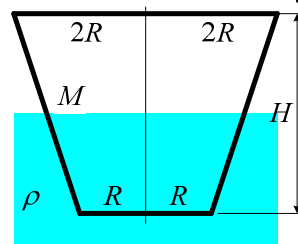
13. 若液体浸到圆台的 $1/2$ 高度处, 圆台与液体的密度之比 $P/\rho =$

14. (续题 13)若设圆台受到微小干扰后的振荡频率 $\omega^2 = k(g/H)$, 则 $k =$

15. (续题 14)若液体浸到圆台的 $1/3$ 高度处并设 $\omega^2 = k(g/H)$, 则 $k =$

16. (续题 15)若液体浸到圆台的 $2/3$ 高度处并设 $\omega^2 = k(g/H)$, 则 $k =$

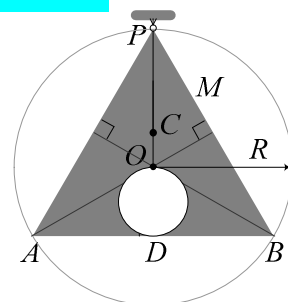
- A. $37/189$ B. $19/56$ C. $98/189$ D. $54/19$ E. $225/98$ F. $144/37$



17. (12分)

(1) 已知外接圆半径为 r 和质量为 m 的均匀正 n 边形, 对过其中心 O 且垂直于所在平面的轴的转动惯量 $I_O = \frac{1}{2} mr^2 (1 - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{\pi}{n})$, 设等边三角形薄板 PAB 的外接圆半径和质量为 R 和 M 。(a) 试求薄板对其中心轴 O 和角点 P 的转动惯量 I_O 和 I_P ; (b) 将薄板 P 端悬挂于天花板构成一个复合摆, 设薄板在其平面内简谐振动的频率为 ω , 试求 ω^2 。

(2) 如图所示, 在对称轴 POD 上以 OD 为直径, 挖去半径为 r 的圆洞而形成一个新系统。(a) 试确定新系统的质量中心 C 位置 d_{PC} ; (b) 计算它关于 P 点的转动惯量 I_P ; (c) 将该系统 P 端悬挂于天花板构成一个复合摆, 设它在其平面内简谐振动的频率为 ω , 试求 ω^2 。



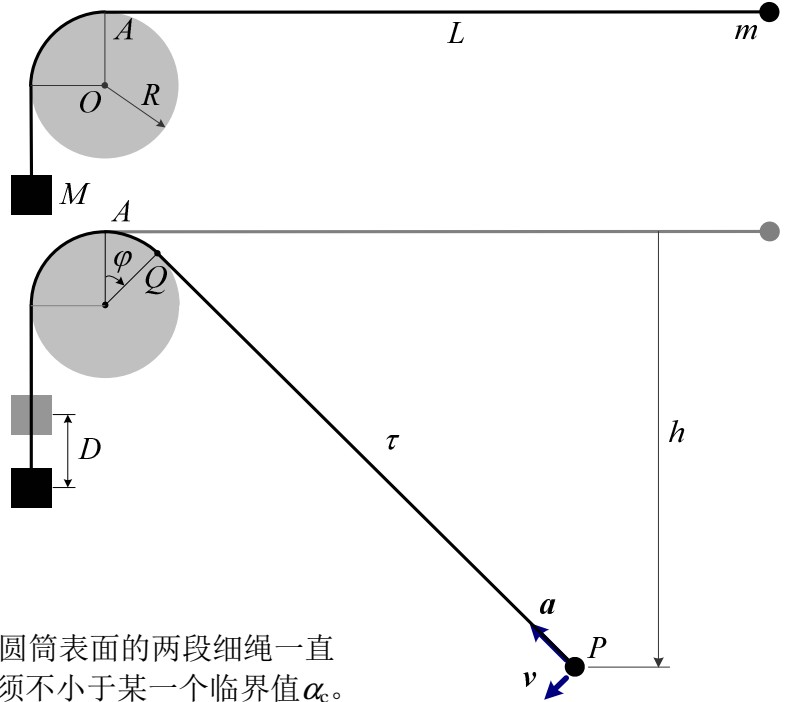
18. (20分)

长度为 L 的水平细绳不计质量和不可伸长，右端系有一个质量为 m 的小球，左端绕过半径为 R 和圆心为 O 的固定圆筒顶端的 A 点，连结一个质量为 M 的重物，并且设质量比 $K=M/m$ 。

(1) 静止的小球 m 被释放后，细绳与圆筒表面之间的动摩擦力可以忽略不计，致使重物 M 滑落，落下距离为 D 时停下来，假设此时它们之间的静摩擦力足够大，致使之后重物 M 处于静止状态。另一方面，小球 m 绕圆筒摆动到 P 点时摆线与圆筒表面在 Q 点相切，设切线 PQ 长度为 τ 和圆心角 AOQ 为 φ 。若 $L-D \gg R$ ，试求重物 M 落下距离 D 后再次静止时的 (a) 小球的机械能 E_0 ；(b) 切线 PQ 长度 τ ；(c) 小球在竖直方向的位移 (下降高度) h ；(d) 摆球在垂直于 PQ 方向的速度 v 和沿着 PQ 方向的加速度 a ；(e) 细绳的张力 T 。

(2) 小球随后可以围绕圆筒摆动至 $\varphi=2\pi$ ，而来自圆筒表面的两段细绳一直保持拉直状态。若设定长度比 $\alpha=D/L$ ，则比值 α 必须不小于某一个临界值 α_c 。试求 (a) 临界值 α_c ；(b) 若长度 L 是距离 D 的 5 倍，试计算质量比 K 。

若有需要，可使用三角方程 $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ 和 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ 。



19. (14分)

(1) 如图中实线所示，质量为 m 的飞船于半径为 r_0 的地球圆形轨道上运行。试求飞船在圆形轨道上运行的速度和 v_0 周期 T_0 。

(2) 飞船来到轨道上的 P 点时被点火改变速度，瞬间将其动能变为原来动能的 K 倍 ($K < 1$ 时减速和 $K > 1$ 时加速)。飞船在此之后沿椭圆轨道飞行，如图中虚线所示。试求 (a) 椭圆轨道长轴 PQ 的半轴长 a ；(b) 飞船在椭圆形轨道上运行的周期 T 。

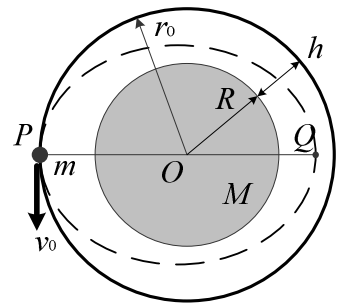
(3) 已知万有引力常数 $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ 、地球的质量 $M=5.9985 \times 10^{24} \text{ kg}$ 和半径 $R=6,400 \text{ km}$ ；飞船质量 $m=2,000 \text{ kg}$ 和位于地球表面的高度 $h=270 \text{ km}$ 。

(a) 试计算飞船在圆形轨道上运行的速度和 v_0 周期 T_0 。

(b) 现在有两艘飞船先后来到 P 点，飞船 1 比较飞船 2 领先时间 $\Delta t_1=121 \text{ s}$ 。

飞船 2 试图超越飞船 1，向前进方向点火，瞬间飞船 2 的速度减少为原来速度的 0.9487 倍。

试求飞船 2 之后沿椭圆轨道飞行的周期 T 和早于飞船 1 返回轨道上 P 点的时间 Δt_2 。



20. (24分)

(1) 试 (a) 写出质量为 M 和边长为 a 的均匀正 N 边形 ($N=3,4,6,8,12,16 \dots$)

空心棱柱 (薄壁厚 $t \ll a$)，绕中心轴 O 的转动惯量 I_0 。

(b) 使用问题 (a) 结果，或其它方法，(i) 求正方形空心棱柱绕 O 轴的转动惯量 I_0 ；以及使用以上空心棱柱结果，或其它方法，(ii) 求正方形实心棱柱绕 O 轴的转动惯量 I_0 。

(c) 分别求出正方形 (i) 空心棱柱和 (ii) 实心棱柱，绕棱边角点 P 轴的转动惯量 I_P 。

(2) 设有 (i) 空心棱柱和 (ii) 实心棱柱的均匀正方形，最初静止在倾角为 θ 的斜面上，其中中心轴线是水平的。现在令棱柱沿斜面不均匀地自由滚动下来，而且在滚下过程中，摩擦力足以阻止该棱柱的任何滑动，使得其棱边在 P 处与斜面保持良好的接触。

(a) 设棱边 P 撞击斜面之前和之后的瞬时角速度分别为 ω_i 和 ω_f 。若 $\omega_f = k_\omega \omega_i$ ，试求系数 k_ω 。

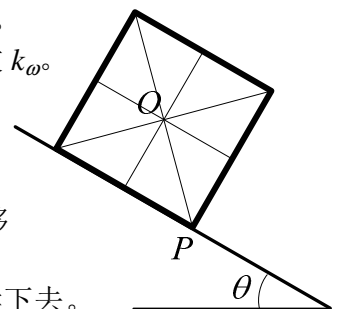
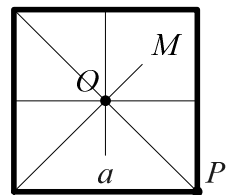
(b) 设棱边 P 撞击斜面之前和之后的动能分别为 E_i 和 E_f 。若 $E_f = k E_i$ ，试求系数 k 。

(c) 为使棱柱能够进行接下来的碰撞， E_i 必须超过一个最小值 $E_i^{\min} = k_{\min} Mga$ 。

试以参量 k 和 θ 表示系数 k_{\min} 。

(d) 如题 (c) 条件满足时，动能 E_i 将接近一个固定值 $E_i^{\max} = k_{\max} Mga$ ，使得薄壁棱柱能够滚下斜面。试以参量 k 和 θ 表示系数 k_{\max} 。

(e) 试求出斜面的最小倾斜角度 θ_0 ，使得棱柱的不均匀滚动一旦启动，将无限地继续下去。



若有需要，可使用积分方程 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 。

2020年第16届泛珠赛力学基础试 答题纸 (8月8日)

选择题 (16×2分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

17.(12分)

简答:		
填写:		
(1)等边三角形薄板(表达为精确解)	(a)对其中心轴的转动惯量和角点 P 的转动惯量 $I_O = \underline{\hspace{2cm}} MR^2$ 和 $I_P = \underline{\hspace{2cm}} MR^2$;	(b)简谐振动的频率 $\omega^2 = \underline{\hspace{2cm}} g/R$.
(2)挖有圆洞的新系统(小数点后三位有效数字)	(a)系统质量中心位置 $d_{PC} = \underline{\hspace{2cm}} R$;	(b)对角点 P 的转动惯量 $I_P = \underline{\hspace{2cm}} MR^2$;
		(c)简谐振动的频率 $\omega^2 = \underline{\hspace{2cm}} g/R$.

18.(20分)

简答:		
填写:		
(1) 静止重物 M 落下距离 D 后再次静止时	(a)系统机械能 $E_0 = \underline{\hspace{2cm}}$. (以参量 D 表示)	(b) 当 $L-D \gg R$ 时切线长度 $\tau = \underline{\hspace{2cm}}$. (以参量 L 和 D 表示)
	(c)下降高度 $h = \underline{\hspace{2cm}}$. (以参量 φ 的三角函数表示)	
	(d) 垂直于 PQ 方向的速度和沿着 PQ 方向的加速度 (以参量 K, D, R 和 φ 的三角函数表示) $v^2 = 2g[\underline{\hspace{2cm}}]$ 和 $a = 2g[\underline{\hspace{2cm}}]/\tau$.	
	(e) 细绳的张力和张力最小值 $T = mg\{\underline{\hspace{2cm}}\}$ (以参量 K, D, R 和 τ , 以及 φ 的三角函数表示) 和 $T_{\min} = 2mgR(\underline{\hspace{2cm}})/\tau$. (以参量 K, D, R 和 τ 表示)	
(2)小球可摆动至 $\varphi = 2\pi$	(a)临界值 $\alpha_c = \underline{\hspace{2cm}}$. (以质量比 K 表示)	(b)若长度 L 是距离 D 的5倍, 则有 质量 $M = \underline{\hspace{2cm}} m$.

