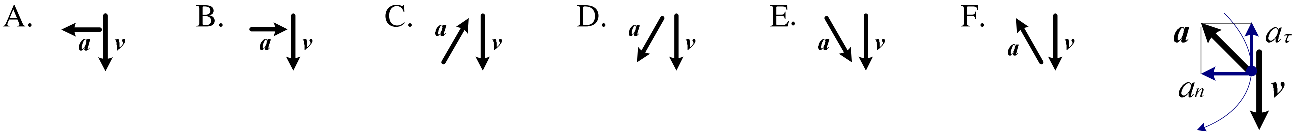
1. 图标某人做不同类型运动的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{a}$。哪种情况下此人放慢速度并向右转?



答案：F

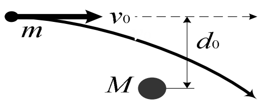
解： A. 匀速向右转　B. 匀速向左转　C. 减速向左转
D. 加速向右转　E. 加速向左转　F. 减速向右转

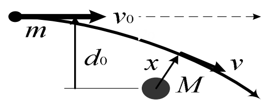
2. 一质量为 m 的无动力飞船以初速度 v_0 从远处飞向一质量为 $M(>>m)$的行星。如果行星周围不存在引力场，飞船会在离行星最近距离 d_0 处以直线航线飞过(如图中虚线所示)。
设$\gamma = GM/v_0^2$，飞船实际离行星最近的距离为 (飞船的实际航线如实线所示)

A. $\sqrt{\gamma^2+d_0^2}-\gamma$　B. $\sqrt{\gamma^2+d_0^2}$　C. $\sqrt{\gamma^2+d_0^2}+\gamma$　D. $\sqrt{\gamma^2-d_0^2}+\gamma$　E. $\sqrt{\gamma^2-d_0^2}$　F. $\sqrt{\gamma^2-d_0^2}+d_0$

3. 当飞船飞过并远离行星后的最终速率是

A. $2v_0$　B. $5v_0/3$　C. $3v_0/2$　D. $4v_0/3$　E. v_0　F. $3v_0/4$





答案：A E　　　**解：**

(1) 由于 $M>>m$，可以认为行星固定。由于引力是向心力，角动量 L 将会关于行星原点守恒。
假设最小距离为 x 和相应速度为 v，在最小距离处的速度垂直于从行星到航天器的位移即 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{x}$。

角动量守恒$(mv_0)d_0=(mv)x \Rightarrow v^2=v_0^2(\frac{d_0}{x})^2$　　(i)

机械能守恒$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{x} \Rightarrow \frac{2GM}{x}=v^2-v_0^2$　　(ii)

式(i)代入(ii)有 $\frac{2GM}{x}=v_0^2[(\frac{d_0}{x})^2-1] \Rightarrow x^2+2\gamma x-d_0^2=0$ 其中$\gamma=\frac{GM}{v_0^2}$　(iii)

解二次方程(iii) 式有 $x=\sqrt{\gamma^2+d_0^2}-\gamma$.

(2) 由机械能守恒，最终速度仍为 v_0。

4. 一质量为 m 的滑块，静止在轨道上距离地面高度为 h 处，其下端是半径为 R 的圆形轨道，问题中所有摩擦力忽略不计。若滑块能够到达圆形轨道的最高点 P，则初始高度的最小值 h_{min}=

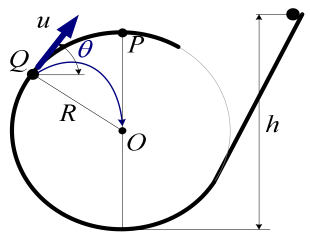
A. $1.577R$　B. $1.866R$　C. $2.25R$　D. $2.5R$　E. $3.0R$　F. $3.5R$

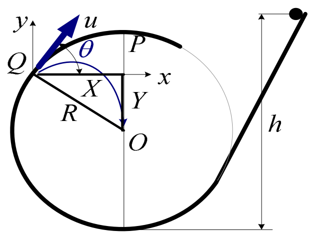
5. (续上题)当 $h<h_{min}$ 时，滑块会在轨道上某点 Q 离开轨道做斜抛运动，并且击中圆心 O 点。设滑块在 Q 点做斜抛运动的速度 $k\sqrt{gR}$ 和倾斜角为θ，则 k 和θ为

A. 0.84和45.0^0　B. 0.80和50.8^0　C. 0.76和54.7^0　D. 0.73和57.7^0　E. 0.71和60.0^0　F. 0.70和61.5^0

6. (续上题)若滑块最后击中 O 点，其在轨道上初高度 h=

A. $1.577R$　B. $1.866R$　C. $2.25R$　D. $2.5R$　E. $3.0R$　F. $3.5R$





答案：D C B　　　**解：**

(1) 轨道最高点$T+mg=mv^2/R$, T=0 时 $v^2=gR$;

机械能守恒 $mgh\geq mg(2R)+\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow h\geq 2R+\frac{v^2}{2g}=\frac{5}{2}R$.

(2) $T+mg\cos\theta=m\dfrac{u^2}{R}$, T=0 时 $u^2=gR\cos\theta$. (i)

在圆心 $O(X, Y)$点有 $X=R\sin\theta$, $Y=R\cos\theta$. (ii)

抛物线方程 $Y=X\tan\theta-\dfrac{gX^2}{2u^2\cos^2\theta}$ (iii)

(ii)→(iii)有 $-R\cos\theta=(R\sin\theta)\tan\theta-\dfrac{g(R\sin\theta)^2}{2u^2\cos^2\theta}\Rightarrow 1=\dfrac{gR\sin^2\theta}{2u^2\cos\theta}$. (iv)

(i)→(iv)有 $1=\dfrac{gR\sin^2\theta}{2(gR\cos\theta)\cos\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}\Rightarrow\tan^2\theta=2=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1\Rightarrow\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$ 和 $u^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}gR$.

∴ $u\approx\underline{0.7598}\sqrt{gR}$ 和 $\theta\approx\underline{54.736^0}$.

(3) 机械能守恒 $mg[h_2-R(1+\cos\theta)]=\dfrac{1}{2}mu^2\Rightarrow g[h_2-R(1+\cos\theta)]=u^2=\dfrac{1}{2}gR\cos\theta$

$\Rightarrow h_2-R(1+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}R\cos\theta\Rightarrow h_2=R(1+\dfrac{3}{2}\cos\theta)=(1\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3}{2})R=(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})R\approx\underline{1.866R}$.

7. 一质量为 M 的光滑大圆环用细绳挂在天花板上。两个质量同为 m 的小圆圈从环顶由静止开始同时向两边下滑，已知质量比 $K=M/m$。当细绳张力 T=0 时圆圈位置θ的余弦函数 $x=\cos\theta$满足方程

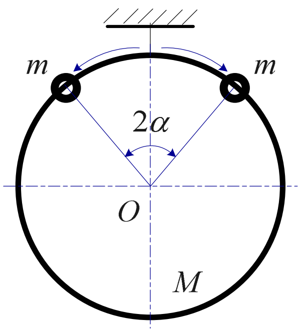
A.$4x^2-6x+K=0$ B.$4x^2+6x-K=0$ C.$3x^2-2x+K=0$ D.$3x^2+2x-K=0$ E.$6x^2-4x+K=0$ F.$6x^2+4x-K=0$

8. (续上题)参量 K 的取值范围为

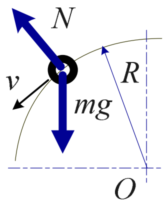
A. $0<3K\le1$ B. $0<2K\le1$ C. $0\le3K\le2$ D. $0<K\le1$ E. $0<2K\le3$ F. $0<K\le2$

9. (续上题)当一个小圆圈的质量 m 是大圆环质量 M 的 2 倍且细绳张力 T=0 时，圆圈位置θ=

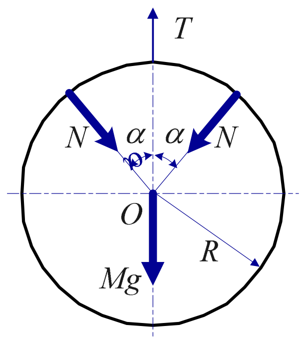
A. 48^0 B. 55^0 C. 60^0 D. 65.2^0 E. 70.5^0 F. 84.4^0



答案：E C D 解：



(a)



(b)

(1) 如图(a)所示，考虑小圆圈 m 沿大圆环作圆周运动的向心力 $m\dfrac{v^2}{R}=mg\cos\alpha-N$;

由机械能守恒定律，圆圈有 $mgR(1-\cos\alpha)=\dfrac{1}{2}mv^2\Rightarrow v^2=2gR(1-\cos\alpha)$.

圆环轨道对小圆环的支持力 $N=mg(\cos\alpha-\dfrac{v^2}{R})=mg[\cos\theta-2(1-\cos\theta)]=mg(3\cos\theta-2)$.

如图(b)所示，考虑大圆圈的平衡$\Sigma F_T=T-Mg+2N\cos\alpha=0$ 即 T=.

当细绳张力 T=0 时 $Mg+2N\cos\theta=Mg+2[mg(3\cos\theta-2)]\cos\theta=0\Rightarrow\dfrac{M}{m}+6\cos^2\theta-4\cos\theta=0$.

设 $x=\cos\theta$ 和 $K=\dfrac{M}{m}$, 则有 $6x^2-4x+K=0$. (i)

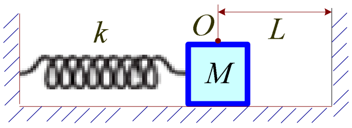
(2) 解得 $x=\dfrac{1}{3}(1\pm\sqrt{1-\dfrac{3}{2}K})=\cos\theta$, $0<3K\le2$.

(3) K=0.5 时由式(i)有 $12x^2-8x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times12\times1}}{2\times12}=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{6}=\cos\theta$.

∴ $\theta=\underline{60^0}$ 或 80.4^0.

10. 刚度 k=50N/m 和质量 M=2kg 的弹簧振子在光滑水平面上往复运动。振子当 t=0 时处于平衡位置 O 并以速度 v_0=5m/s 向右运动。现有另一座墙，到原点 O 的距离为 L=50cm。若振子与墙的撞击是完全弹性碰撞，则振子首次回到原点 O 的时间为

A. 0.052s　　B. 0.104s　　C. 0.157s　　D. 0.209s　　E. 0.262s　　F. 0.314s



答案：**D**　　解：振子位移 $x(t)=A\sin\omega t$, 其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{M}}=5/\text{s}$;

速度 $v(t)=A\omega\cos\omega t$, 初速度 $v(0)=A\omega=v_0$; 振幅 $A=\dfrac{v_0}{\omega}$. $x(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

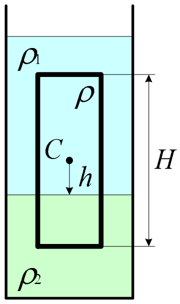
设当 $t=\tau$ 时振子与墙撞击即 $L=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega\tau)\Rightarrow\sin(5\tau)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 5\tau=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\tau=\dfrac{\pi}{30}$.

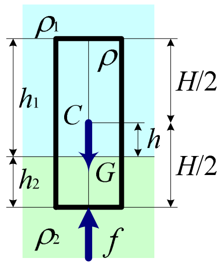
振子首次回到原点 O 的时间 $2\tau=\dfrac{\pi}{15}\approx\underline{0.209}$s.

11. 高度为 H 和横截面积为 A 的均匀柱体，悬浮在密度分别为ρ_1和ρ_2的分层液体界面处($\rho_1<\rho_2$)。当柱体保持平衡时，设其质量中心 C 与分层液体接口的距离 $h=kH$，则 k=

12. 设柱体受到微小干扰后的振荡频率$\omega^2=k(g/H)$，则 k=

A. $\dfrac{\rho_1+\rho_2-2\rho}{2(\rho_2-\rho_1)}$　B. $\dfrac{\rho_1+\rho_2-2\rho}{2(\rho_2+\rho_1)}$　C. $\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho}$　D. $\dfrac{\rho_1+\rho_2+2\rho}{2(\rho_2-\rho_1)}$　E. $\dfrac{2(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1+\rho_2-2\rho}$　F. $\dfrac{\rho_2+\rho_1}{\rho}$





答案：**A C**　　解：

$$h_1=\frac{H}{2}+h \text{ 和 } h_2=\frac{H}{2}-h.$$

(1)　平衡时合力 $G-f=\rho g(AH)-p_1g(h_1A)-p_2g(h_2A)=g(\rho H-p_1h_1-p_2h_2)A=0$

$\Rightarrow\rho H-\rho_1(\dfrac{H}{2}+h)-\rho_2(\dfrac{H}{2}-h)=0\Rightarrow h=\underline{\dfrac{\rho_1+\rho_2-2\rho}{2(\rho_2-\rho_1)}}H.$

(2)　对于柱体向下微小位移 x,

恢复力$\Delta f=ma\Rightarrow gA(\rho_1x-\rho_2x)=gA(\rho_2-\rho_1)x=(\rho AH)a\Rightarrow a+\omega^2x=0$, 其中 $\omega^2=\underline{\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho}}\dfrac{g}{H}$.

(题 13 至 16)

在密度为ρ的液体中，静止地浸有密度为P及质量为的高度为 H、底面半径为 R 和 $2R$ 的倒立圆台。

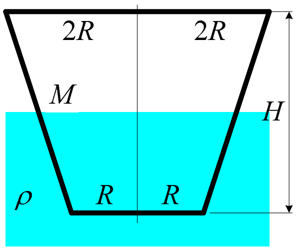
13. 若液体浸到圆 1/2 高度处，圆台与液体的密度之比P/ρ=

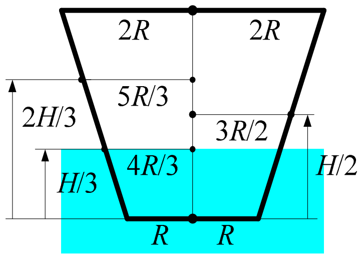
14. (续题 13)若设圆台受到微小干扰后的振荡频率$\omega^2=k(g/H)$，则 k=

15. (续题 14)若液体浸到圆台的 1/3 高度处并设圆台受到微小干扰后的振荡频率$\omega^2=k(g/H)$，则 k=

16. (续题 15)若液体浸到圆台的 2/3 高度处并设$\omega^2=k(g/H)$，则 k=

A. $\dfrac{37}{189}$　B. $\dfrac{19}{56}$　C. $\dfrac{98}{189}$　D. $\dfrac{54}{19}$　E. $\dfrac{225}{98}$　F. $\dfrac{144}{37}$





答案： **B D F E**　　　解：

密度为P的圆台体积 $V_0=\frac{1}{3}\pi[R^2+R(2R)+(2R)^2]H=\frac{7}{3}\pi R^2H$, 则质量 $M=PV=\frac{7}{3}\pi R^2HP$;

液体对物体的浮力 $f=\rho Vg$ 其中 V 为浸在液体内体积.

由阿基米得定理 $f=G$ 即 $\rho gV=PV_0g \Rightarrow PV_0=\rho V \Rightarrow$ 密度之比 $\frac{P}{\rho}=\frac{V}{V_0}$.

$dV=Adx$, $df=\rho gdV$, $k=\frac{df}{dx}=\frac{\rho gAdx}{dx}=\rho gA$

液体浸到圆台高度		1/3	1/2	2/3
倒立圆台平衡时	浸在液体内体积 $V=$	$\frac{37}{81}\pi R^2H$	$\frac{19}{24}\pi R^2H$	$\frac{98}{81}\pi R^2H$
	密度比=	$\frac{37}{189}$	$\frac{19}{56}$	$\frac{98}{189}$
	质量 $M=\rho V=$	$\frac{37}{81}\pi R^2H\rho$	$\frac{19}{24}\pi R^2H\rho$	$\frac{98}{81}\pi R^2H\rho$
圆台向下微小位移 x 后	浸在液体内体积变化$\Delta V=$	$\pi(\frac{4R}{3})^2x=\frac{16}{9}\pi R^2x$	$\pi(\frac{3R}{2})^2x=\frac{9}{4}\pi R^2x$	$\pi(\frac{5R}{3})^2x=\frac{25}{9}\pi R^2x$
	合力$\Sigma F=-\rho g\Delta V=Ma$	$-\rho g\frac{16}{9}\pi R^2x=(\frac{37}{81}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho\frac{9}{4}\pi R^2x=(\frac{19}{24}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho g\frac{25}{9}\pi R^2x=(\frac{98}{81}\pi R^2H\rho)a$
	$a+\omega^2x=0$ 振荡频率$\omega^2=$	$a+\frac{144g}{37H}x=0 -> \omega^2=\frac{144g}{37H}$	$a+\frac{54g}{19H}x=0 -> \omega^2=\frac{54g}{19H}$	$a+\frac{225g}{98H}x=0 -> \omega^2=\frac{225g}{98H}$

【附录】正立圆台

液体浸到圆台高度		1/3	1/2	2/3
平衡时	浸在液体内体积 $V=$	$\frac{91}{81}\pi R^2H$	$\frac{37}{24}\pi R^2H$	$\frac{152}{81}\pi R^2H$
	密度比=	$\frac{91}{189}$	$\frac{37}{56}$	$\frac{152}{189}$
	质量 $M=\rho V=$	$\frac{91}{81}\pi R^2H\rho$	$\frac{37}{24}\pi R^2H\rho$	$\frac{152}{81}\pi R^2H\rho$
圆台向下微小位移 x 后	浸在液体内体积变化$\Delta V=$	$\pi(\frac{4R}{3})^2x=\frac{16}{9}\pi R^2x$	$\pi(\frac{3R}{2})^2x=\frac{9}{4}\pi R^2x$	$\pi(\frac{5R}{3})^2x=\frac{25}{9}\pi R^2x$
	合力$\Sigma F=-\rho g\Delta V=Ma$	$-\rho g\frac{16}{9}\pi R^2x=(\frac{91}{81}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho\frac{9}{4}\pi R^2x=(\frac{37}{24}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho g\frac{25}{9}\pi R^2x=(\frac{152}{81}\pi R^2H\rho)a$
	$a+\omega^2x=0$ 振荡频率$\omega^2=$	$a+\frac{144g}{91H}x=0 -> \omega^2=\frac{144g}{91H}$	$a+\frac{54g}{37H}x=0\quad \omega^2=\frac{54g}{37H}$	$a+\frac{225g}{152H}x=0\quad \omega^2=\frac{225g}{152H}$

17. (11分)

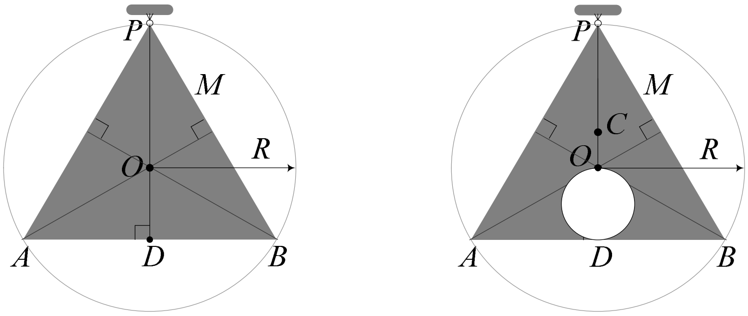
(1) 已知外接圆半径为r和质量为m的均匀正n边形，对过其中心O且垂直于所在平面的轴的转动惯量$I_O=\frac{1}{2}mr^2(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n})$。设等边三角形薄板$PAB$的外接圆半径和质量为$R$和$M$，试求

(a) 薄板对其中心轴O和角点P的转动惯量 I_O和I_P;

(b) 将薄板 P 端悬挂于天花板构成一个复合摆，设它在其平面内简谐振动的频率为ω，试求ω^2。

(2) 在对称轴POD上以OD为直径，挖去半径为r的圆洞而形成一个新系统。试

(a) 确定新系统的质量中心C位置d_{PC}；(b) 计算系统关于P点的转动惯量I_P；
(c) 将系统P端悬挂于天花板构成一个复合摆，设它在其平面内简谐振动的频率为ω，试求ω^2。



解答：

(1) (4 分)

(a) $n=3,\ I_O=\frac{1}{2}mr^2(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n})=\frac{1}{2}MR^2(1-\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)=\frac{1}{4}MR^2$;

$d_{OP}=R,\ I_P=I_O+M(d_{OP})^2=\frac{1}{4}MR^2+MR^2=\frac{5}{4}MR^2$. (b) 频率 $\omega^2=\frac{MgL_{OP}}{I_P}=\frac{MgR}{5MR^2/4}=\underline{\frac{4}{5}}\frac{g}{R}$.;

(2) (7 分)

薄板面积 $A_1=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, 面密度 $\sigma=\frac{M}{A_1}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{M}{R^2}$; 系统的面积 $\Sigma A=A_1+A_2=(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{16})R^2$.

i=1,2	面积 A^i	$m^i=\sigma A^i$	d_{PC}^i	转动惯量 I_c^i	转动惯量 $I_P^i=I_c^i+m^i(d_P^i)^2$
1.三角形板	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	M	R	$\frac{1}{4}m_1r_1^2=\frac{1}{4}MR^2$	$\frac{1}{4}MR^2+MR^2=\frac{5}{4}MR^2$
2. 负圆洞	$\pi(\frac{R}{4})^2=\frac{\pi}{16}R^2$	$\frac{\pi}{12\sqrt{3}}M$	$\frac{5}{4}R$	$\frac{1}{2}m_2r_2^2=\frac{\pi}{384\sqrt{3}}MR^2$	$\frac{\pi}{384\sqrt{3}}MR^2+\frac{\pi}{12\sqrt{3}}M(\frac{5}{4}R)^2=\frac{51\pi}{384\sqrt{3}}MR^2$

(a) 系统的质心 $d_{PC}=\frac{A_1x_1+A_2x_2}{\Sigma A}=\frac{48\sqrt{3}-5\pi}{48\sqrt{3}-4\pi}R=0.9555R$;

(b) 转动惯量 $I_P=I_P^1-I_P^2=\frac{5}{4}MR^2-\frac{31\pi}{384\sqrt{3}}MR^2=(\frac{5}{4}-\frac{51\pi}{384\sqrt{3}})MR^2 I_C=\underline{1.0091}MR^2$;

(c) 系统的质量 $\Sigma M=\sigma\Sigma A=\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{M}{R^2}(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{16})R^2=\frac{4}{3\sqrt{3}}(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{16})M=(1-\frac{\pi}{12\sqrt{3}})M=0.84885M$.

频率 $\omega^2=\frac{(\Sigma M)gd_{PC}}{I_P}=\frac{(0.84885M)g(0.9555R)}{1.0091MR^2}=\underline{0.80376}\frac{g}{R}$.

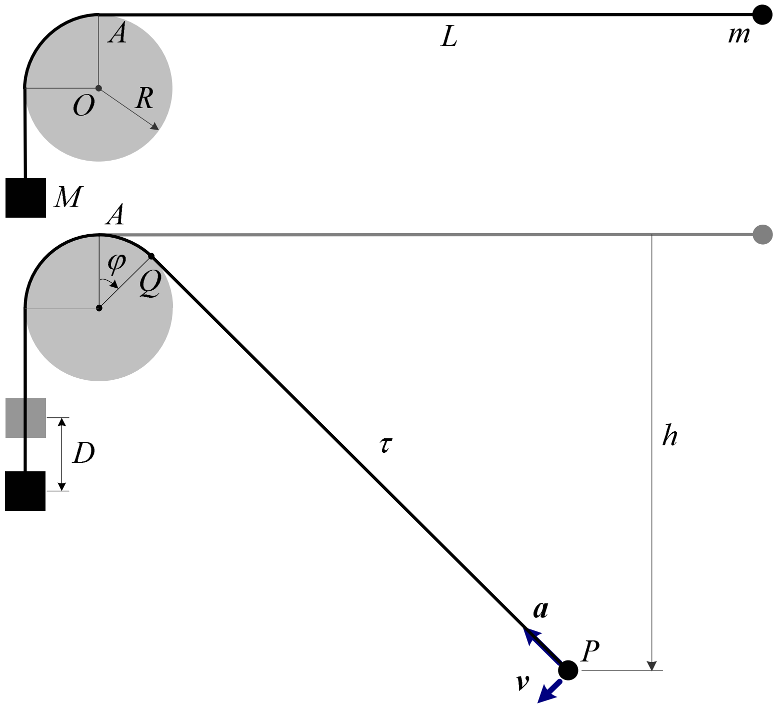
18. (19分)
长度为 L 的水平细绳不计质量和不可伸长，右端系有一个质量为 m 的小球，左端绕过半径为 R 和圆心为 O 的固定圆筒顶端的 A 点，连结一个质量为 M 的重物，并且质量比 $K=\frac{M}{m}$。

(1) 静止的小球 m 被释放后，细绳与圆筒表面之间的动摩擦力可以忽略不计，致使重物 M 滑落，落下距离为 D 时停下来，假设此时它们之间的静摩擦力足够大，致使之后重物 M 处于静止状态。另一方面，小球 m 绕圆筒摆动到 P 点时摆线与圆筒表面在 Q 点相切，设圆心角 AOQ 为φ和切线 PQ 长度为τ。假设 $L-D>>R$，试求重物 M 落下距离 D 后再次静止时的
(a) 小球的机械能 E_0；(b) 切线 PQ 长度τ；(c) 小球在竖直方向的位移(下降高度) $h=h(\varphi)$；
(d) 摆球在垂直于 PQ 方向的速度 $v=v(\varphi)$和沿着 PQ 方向的加速度 $a=a(\varphi)$；
(e) 细绳的张力 $T=T(\varphi)$及其最小值 $T_{\min}$。

(2) 若运动过程中来自圆筒表面的两段细绳一直保持拉直状态，而且小球随后可以围绕圆筒摆动至$\varphi\geq 2\pi$。设定长度比$\alpha=\frac{L}{D}>1$，则比值α必须不小于某一个临界值α_c。试

(f) 求临界值α_c；(g) 若长度 L 是距离 D 的 5 倍，计算质量比 K。

若有需要,可使用三角方程 $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$ 和 $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\cos x\sin y$.



(1) (15 分)

(a) 静止重物 M 落下距离 D 后再次静止时，系统机械能 $E_0=MgD$.

(解法 1)

(b) 设圆筒表面左段细绳初始长度为 l，则

细绳总长度 $L+\frac{\pi}{2}R+l=\tau+(\varphi+\frac{\pi}{2})R+l+D \Rightarrow$ 切线长度 $\tau=L-D-R\varphi$.

(c) 下降高度 $h=R(1-\cos\varphi)+\tau\sin\varphi$.

(d) 由机械能守恒 $E_0=MgD=\frac{1}{2}mv^2-mgh$ 有

垂直于 PQ 方向的速度 $v^2=2g\,(\frac{M}{m}D+h)=2g[KD+R(1-\cos\varphi)+\tau\sin\varphi]$,

和沿着 PQ 方向的加速度 $a=\frac{v^2}{\tau}=\frac{2g}{\tau}[KD+R(1-\cos\varphi)+\tau\sin\varphi]$.

(e) 细绳的张力 $T=m(g\sin\varphi+a)=mg\{\sin\varphi+\frac{2}{\tau}[KD+R(1-\cos\varphi)+\tau\sin\varphi]\}=mg\{\frac{2}{\tau}[KD+R(1-\cos\varphi)]+3\sin\varphi\}$

$=\frac{2mgR}{\tau}[\,K\frac{D}{R}+1+A\sin(\varphi-\theta)]\geq 0$, 其中 $\tan\theta=\frac{2}{3}\frac{R}{\tau}$ 和 $A=\sqrt{1+(\frac{3}{2}\frac{\tau}{R})^2}\approx\frac{3}{2}\frac{\tau}{R}$; 因 $1\geq\sin(\varphi-\theta)\geq-1$ 有

$T_{\min}=\frac{2mgR}{\tau}(\,K\frac{D}{R}+1-A)=\frac{2mgR}{\tau}(\,K\frac{D}{R}+1-\frac{3}{2}\frac{\tau}{R})=2mg(\frac{KD}{L-D}+\frac{R}{\tau}-\frac{3}{2})=mg(2\frac{K}{\alpha-1}-3)$, 其中$\alpha=\frac{L}{D}>1$.

(解法 2) 考虑 $L-D>>R$ 时

(b) 切线长度 $\tau=L-D-R\varphi\approx L-D$.

(c) 下降高度 $h=R(1-\cos\varphi)+\tau\sin\varphi\approx\tau\sin\varphi$.

(d) 垂直于 PQ 方向的速度 $v^2=2g(\frac{M}{m}D+h)=2g(KD+\tau\sin\varphi)$

和沿着 PQ 方向的加速度 $a=\frac{v^2}{\tau}=2g(\frac{KD}{L-D}+\sin\varphi)=2g(\frac{K}{\alpha-1}+\sin\varphi)$, 其中长度比$\alpha=\frac{L}{D}>1$.

(e) 细绳的张力 $T=m(g\sin\varphi+a)=mg[\sin\varphi+2(\frac{K}{\alpha-1}+\sin\varphi)]=mg(\frac{2K}{\alpha-1}+3\sin\varphi)$ 和 $T_{\min}=2mg(\frac{2K}{\alpha-1}-3)$.

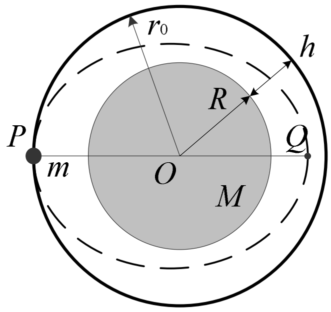
(2) (4 分)

(f) 细绳张力的最小值 $T_{min}\geq 0$ 即 $\dfrac{2K}{\alpha-1}-3\geq 0 \Rightarrow \alpha\leq \underline{1+\dfrac{2}{3}K}=\alpha_c$.

(g) 若长度 L 是距离 D 的 5 倍即长度比 $\alpha=5=1+\dfrac{2}{3}K \Rightarrow$ 质量比 $K=\underline{6}$ 即 $M=6m$.

19. (14分)

(1) 如图中实线所示，质量为 m 的飞船于半径为 r_0 的地球圆形轨道上运行。试求飞船在圆形轨道上运行的速度和 v_0 周期 T_0。。 (3 分)



(2) 飞船来到轨道上的 P 点时被点火改变速度，瞬间将其动能变为原来动能的 K 倍($K<1$ 时减速和 $K>1$ 时加速)。飞船在此之后沿椭圆轨道飞行，如图中虚线所示。试求 (7 分)
(a) 椭圆轨道长轴 PQ 的半轴长 a；(b) 飞船在椭圆形轨道上运行的周期 T。(写成参量 K 的表达式)

(3) 已知万有引力常数 $G=6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}、地球的质量 $M=5.9985\times10^{24}$kg 和半径 $R=6{,}400$km；飞船质量 $m=2{,}000$kg 和位于地球表面的高度 $h=270$km。 (4 分)
(a) 试计算飞船在圆形轨道上运行的速度和 v_0 周期 T_0。
(b) 现在有两艘飞船先后来到 P 点，飞船 1 比较飞船 2 领先时间 $\Delta t_1=121$s。
飞船 2 试图超越飞船 1，向前进方向点火，瞬间飞船 2 的速度减少为原来速度的 0.9487 倍。
试求飞船 2 之后沿椭圆轨道飞行的周期 T 和早于飞船 1 返回轨道上 P 点的时间 Δt_2。

解答：

(1) 由牛顿定律 $G\dfrac{mM}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}=mr(\dfrac{2\pi}{T})^2$ 有 $v_0=\sqrt{\dfrac{GM}{r_0}}$ 和 $T_0=\dfrac{2\pi r_0}{v_0}$.

(2) 飞船的动能 $E_{0k}=\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{GMm}{2r_0}$，势能 $E_{0p}=-\dfrac{GMm}{r_0}$ 和总能量 $E_0=E_{0k}+E_{0p}=-\dfrac{GMm}{2r_0}=-E_{0k}$.

飞船点火后瞬间动能 $E_k=KE_{0k}=K\dfrac{GMm}{2r_0}$，势能 $E_p=E_{0p}=-\dfrac{GMm}{r_0}$ 和总能量 $E_K=E_k+E_p=(K-2)\dfrac{GMm}{2r_0}$.

(a) 飞船之后在椭圆轨道上运行，设总能量 $E=-\dfrac{GMm}{2a}$ 其中 a 为椭圆轨道长轴 PQ 的半轴长。

由能量守恒有 $E=E_K$ 即 $-\dfrac{GMm}{2a}=(K-2)\dfrac{GMm}{2r_0} \Rightarrow \dfrac{a}{r_0}=\underline{\dfrac{1}{2-K}}$；

(b) 开普勒第三定律 $\dfrac{T^2}{T_0^2}=\dfrac{a^3}{r_0^3}=\dfrac{1}{(2-K)^3} \Rightarrow \dfrac{T}{T_0}=\underline{\dfrac{1}{\sqrt{(2-K)^3}}}$.

(3) $m=2{,}000$kg, $G=6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}, $M=5.9985\times10^{24}$ kg, $r_0=R+h=(6400+270)\text{km}=6.67\times10^6$m.

(a) $v_0=\sqrt{\dfrac{6.67\times10^{-11}\times5.9985\times10^{24}}{6.67\times10^6}}=7{,}745$m/s 和 $T_0=\dfrac{2\pi\times6.67\times10^6}{7{,}745}=\underline{5{,}411}.085$s.

(b) 飞船 2 向前进方向瞬间点火后 $K=0.9487^2=0.9$,

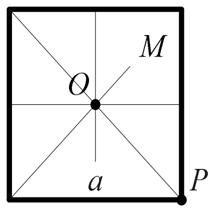
沿椭圆轨道飞行的周期 $T=\dfrac{5{,}411.085}{\sqrt{(2-0.9)^3}}=\dfrac{5{,}411.085}{1.1369}=\underline{4{,}690}$s.

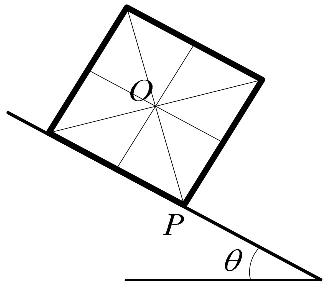
飞船 2 早于飞船 1 返回轨道上 P 点的时间 $\Delta t_2=T_0-T-\Delta t_1=5{,}411-4{,}690-121=\underline{600}$s.

20. (24 分)

(1) 试　(7 分)

(a) 写出质量为 M 和边长为 a 的均匀正 N 边形(N=3,4,6,8,12,16…) 空心棱柱(薄壁厚 t<<a)，绕中心轴 O 的转动惯量 I_O。(b) 使用问题(a)结果，或其它方法，(i)求正方形空心棱柱绕 O 轴的转动惯量 I_O；以及使用以上空心棱柱结果，或其它方法，(ii)求正方形实心棱柱绕 O 轴的转动惯量 I_O。





(2) 设有(i)空心棱柱和(ii)实心棱柱的均匀正方形，最初静止在倾角为θ的斜面上，其中心轴线是水平的。现在令棱柱沿斜面不均匀地自由滚动下来，而且在滚下过程中，摩擦力足以阻止该棱柱的任何滑动，使得其棱边在 P 处与斜面保持良好的接触。　(17 分)

(a) 设棱边 P 撞击斜面之前和之后的瞬时角速度分别为ω_i和ω_f。若 ω_f=$k_\omega\omega_i$，试求系数 k_ω。

(b) 设棱边 P 撞击斜面之前和之后的动能分别为 E_i 和 E_f。若 E_f=kE_i，试求系数 k。

(c) 为使棱柱能够进行接下来的碰撞，E_i 必须超过一个最小值 E_i^{min}=$k_{\min}Mga$。试以参量 k 和θ表示系数 $k_{\min}$。

(d) 如题(c)条件满足时，动能 E_i 将接近一个固定值 $E_i^{\max}$=$k_{\max}Mga$，使得薄壁棱柱能够滚下斜面。试以参量 k 和θ表示系数 $k_{\max}$。

(e) 试求出斜面的最小倾斜角度θ_0，使得棱柱的不均匀滚动一旦启动，将无限地继续下去。

若有需要，可使用 (i) 积分方程$\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$.

(1) 解答

(a) 解法 1 平行移轴法

棱柱一条边的质量 m=M/N, 中心点 O 到该边的距离 d=$\dfrac{a}{2\tan(\pi/N)}$.

绕 O 点的的转动惯量 $I_O = I_C + md^2 = \dfrac{ma^2}{12} + m[\dfrac{a}{2\tan(\pi/N)}]^2 = [\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4\tan^2(\pi/N)}]ma^2$,

则正 N 边形棱柱绕其中心轴线 O 的的转动惯量 I=NI_O=$\underline{\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4}\cot^2(\pi/N)\,Ma^2}$.

[附表 1]

N=	边角β	顶角α	$\tan\dfrac{\alpha}{2}$	$h = \dfrac{a}{2}\tan^{-1}\dfrac{\alpha}{2}$	$I = \left(\dfrac{h^2}{a^2} + \dfrac{1}{12}\right)Ma^2 = k\,Ma^2 = l\,Mh^2$
3	60^0	120^0	$\sqrt{3}$	$h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{a}{2}$	$k = \dfrac{1}{6}$, l =2
4	90^0	90^0	1	$h = \dfrac{a}{2}$	$k = \dfrac{1}{3}$, $l = \dfrac{4}{3}$
6	120^0	60^0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$h = \sqrt{3}\dfrac{a}{2}$	$k = \dfrac{5}{6}$, $l = \dfrac{10}{9}$
8	135^0	45^0	$\sqrt{2}-1$	$h = (1+\sqrt{2})\dfrac{a}{2}$	$k = \dfrac{5+3\sqrt{2}}{6}$, $l = \dfrac{2(3-2\sqrt{2})}{3}$
12	150^0	30^0	$2-\sqrt{3}$	$h = (2+\sqrt{3})\dfrac{a}{2}$	$k = \dfrac{11+6\sqrt{3}}{6}$, $l = 4\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

解法 2 微积分法

$$I=2N\int_0^{a/2}dI=2N\int_0^{a/2}\frac{M}{Na}(d^2+x^2)dx=\frac{2M}{a}[d^2x+\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{a}{2}}=M[d^2+\frac{a^2}{12}]=\underline{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\cot^2(\pi/N)Ma^2}.$$

(b) 解法 1 使用问题(a)结果

当 N=4 时, 棱柱绕 O 轴的转动惯量 $I=NI_O=[\frac{1}{12}+\frac{1}{4\tan^2(\pi/4)}]Ma^2=\frac{1}{3}Ma^2$.

解法 2 微/积分法

$$I=4\times(2\int_0^{a/2}dI)=4\times[2\int_0^{a/2}\frac{M}{4a}(h^2+x^2)dx]=\frac{2M}{a}[h^2x+\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{a}{2}}=M[h^2+\frac{a^2}{12}]=\frac{1}{3}Ma^2.$$

(c) 解法 1 微/积分法

正方形实心棱柱的面密度 $\sigma=\frac{M}{a^2}$.对于边长为 0<x≤a 的薄壁棱柱

$$dI=\frac{1}{3}(dm)(2x)^2=\frac{1}{3}(4x^2)(\sigma dA)=\frac{1}{3}(4x^2)[\frac{M}{a^2}4(2x)dx]=\frac{32M}{3a^2}x^3dx,$$

则实体棱柱绕其中心轴线 O 的的转动惯量

$$I=\int_0^{a/2}dI=\int_0^{a/2}\frac{32M}{3a^2}x^3dx=(\frac{32M}{3a^2})\int_0^{\frac{a}{2}}x^3dx=(\frac{32M}{3a^2})\frac{x^4}{4}\Big|_0^{a/2}=\frac{1}{6}Ma^2.$$

解法 2 垂直轴法

对于质量为 m 和边长为 a 的正方形薄板 $I_x=I_y=\frac{1}{12}ma^2$, $I_O=I_x+I_y=\frac{1}{6}ma^2$, 则

对于质量为 M 和边长为 a 的正方形厚板(实体棱柱) $I_O=\frac{1}{6}Ma^2$.

(d) $I_P=I_O+M(d_{PO})^2=I_O+M(\frac{a}{\sqrt{2}})^2=I_O+M\frac{a^2}{2}$.

(i) 空心棱柱 $I_O=\frac{1}{3}Ma^2$, $I_P=(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})Ma^2=\frac{5}{6}Ma^2$; (ii) 实心棱柱 $I_O=\frac{1}{6}Ma^2$, $I_P=(\frac{1}{6}+\frac{1}{2})Ma^2=\frac{2}{3}Ma^2$.

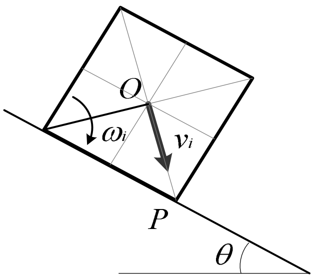
(2) 解答

(a) 某一棱边撞击斜面之前关于 P 点的角动量为

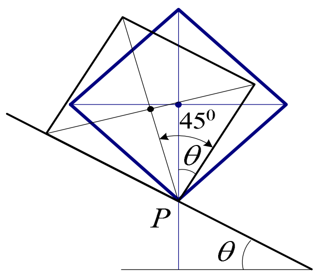
刚体关于质心 O 的转动角动量与质心 O 的平动角动量之和, 即 $L_i=I_O\omega_i+(Mv_i)(0)=\frac{1}{6}Ma^2\omega_i$;

该棱边撞击斜面之后关于 P 点的角动量 $L_f=I_P\omega_f=\frac{2}{3}Ma^2\omega_f$

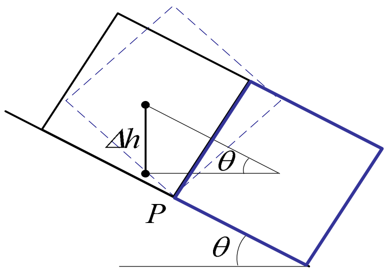
角动量守恒 $L_i=L_f\Rightarrow\frac{1}{6}Ma^2\omega_i=\frac{2}{3}Ma^2\omega_f\Rightarrow\omega_f=\frac{1}{4}\omega_i$ $\omega_f=\frac{1}{4}\omega_i\Rightarrow k_\omega=\frac{1}{4}$.



(a, b) 撞击前和撞击后



(c)



(d)

(b) 某一棱边撞击斜面之前和之后的动能

$$E_i=\frac{1}{2}I_P\omega_i^2 \text{ 和 } E_f=\frac{1}{2}I_P\omega_f^2\Rightarrow\frac{E_f}{E_i}=(\frac{\omega_f}{\omega_i})^2=(\frac{1}{4})^2\Rightarrow E_f=\frac{1}{16}E_i\Rightarrow k=\frac{1}{16}.$$

(c) 碰撞后薄壁棱柱的质心 O 至少转动一个角度$(45^o-\theta)$，上升到最高位置$\Delta h= a[1-\cos(45^o-\theta)]$.

$E_f = kE_i \ge Mg\Delta h = Mg\dfrac{a}{\sqrt{2}}[1-\cos(45^o-\theta)] \Rightarrow E_f^{\min} = k_{\min}Mga \Rightarrow k_{\min} = \dfrac{1-\cos(45^0-\theta)}{\sqrt{2}k} = \dfrac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{2k}$.

(d) 设某一棱边第 n 次撞击斜面之前和之后的动能分别为 E_i^n 和 E_f^n，由题(b)结果有 $E_f^n = kE_i^n$.
接下来第 $n+1$ 次碰撞，质量中心会降低一个高度$\Delta h = a\sin\theta$，动能变化$\Delta E = Mga\sin\theta$.
则有 $E_i^{n+1} = E_f^n + \Delta E = kE_i^n + Mga\sin\theta$, $n = 1,2,3,\ldots$， 即 $E_i^2 = kE_i^1 + \Delta E$,
$E_i^3 = kE_i^2 + \Delta E = k(kE_i^1+\Delta E)+\Delta E = k^2E_i^1 + (k+1)\Delta E$, $E_i^4 = kE_i^3 + \Delta E = k[k^2E_i^1+(k+1)\Delta E]+\Delta E = k^3E_i^1+(k^2+k+1)\Delta E$,

$\ldots\ldots$, $E_i^{n+1} = k^nE_i^1 + (k^{n-1}+\ldots+k+1)\Delta E, = k^nE_i^1 + \dfrac{1-k^n}{1-k}\Delta E$.

由于 $k<1$ 当 $n\to\infty$, $E_i^{n+1} = \dfrac{\Delta E}{1-k} = E_i^0 \Rightarrow E_i^0 = \dfrac{\sin\theta}{1-k}Mga$, 其中 $k_{\max} = \dfrac{\sin\theta}{1-k}$.

(e) 要使薄壁棱柱的不均匀滚动无限地继续下去, $E_i^0 \ge E_i^{\min}$

$\Rightarrow k_0 \ge k_{\min}$ 即 $\dfrac{\sin\theta}{1-k} \ge \dfrac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{2k} \Rightarrow r\sin\theta + \cos\theta \ge \sqrt{2}$ 其中 $r = \dfrac{1+k}{1-k}$

$\Rightarrow \dfrac{r}{R}\sin\theta + \dfrac{1}{R}\cos\theta = \sin(\varphi+\theta) \ge \dfrac{\sqrt{2}}{R}$ 其中 $R = \sqrt{r^2+1}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{R}$ 和 $\cos\varphi = \dfrac{r}{R}$.

[附表 2]

	$I_P = I_O + M(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = I_O + \frac{1}{2}Ma^2$	(i)空心 $I_O = \frac{1}{3}Ma^2$, $I_P = \frac{5}{6}Ma^2$	(ii)实心 $I_O = \frac{1}{6}Ma^2$, $I_P = \frac{2}{3}Ma^2$
(a)	$L_i = I_O\omega_i + (Mv_i)^P$ 和 $L_f = I_P\omega_f$	$L_i = \frac{1}{3}Ma^2\omega_i$ 和 $L_f = \frac{5}{6}Ma^2\omega_f$	$L_i = \frac{1}{6}Ma^2\omega_i$ 和 $L_f = \frac{2}{3}Ma^2\omega_f$
	$L_i = L_f \Rightarrow \omega_f = k_\omega\omega_i$	$\frac{1}{3}\omega_i = \frac{5}{6}\omega_f \Rightarrow k_\omega = \frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}\omega_i = \frac{2}{3}\omega_f \Rightarrow k_\omega = \frac{1}{4}$
(b)	$E_f = kE_i$ 和 $E = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow k = (k_\omega)^2$	$k = \frac{4}{25}$	$k = \frac{1}{16}$
(c)	$E_f^{\min} = k_{\min}Mga \Rightarrow k_{\min} = \frac{1-\cos(45^0-\theta)}{\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{2}-\cos\theta-\sin\theta}{2k}$		(d) $E_i^{\max} = k_{\max}Mga \Rightarrow k_{\max} = \frac{\sin\theta}{1-k}$
(e)	$r = \frac{1+k}{1-k}$, $R = \sqrt{r^2+1}$, $\sin\varphi = \frac{1}{R}$ $\sin(\varphi+\theta) \ge \frac{\sqrt{2}}{R}$	$r = \frac{29}{21}$ 及 $R \approx 1.7050$. $\sin\varphi = \frac{1}{R} \approx 0.5865 \Rightarrow \varphi \approx 35.910^0$ $\theta + u \ge 56.042^0 \Rightarrow \theta_0 \approx \underline{20.132^0}$	$r = \frac{17}{15}$ 及 $R \approx 1.5114$. $\sin u = \frac{1}{R} \approx 0.6616 \Rightarrow u \approx 41.424^0$ $\theta + u \ge 69.341^0 \Rightarrow \theta_0 \approx \underline{27.917^0}$