香港物理奧林匹克委員會主辦 香港科技大學高等研究院贊助

第 17 屆泛珠三角物理奧林匹克暨中華名校邀請賽力學基礎試 試題

2021 年 5 月 15 日 9:30-12:30

选择题 1 至 15(答案唯一共 30 分)和简答题 16 至 18(共 70 分)，做在答题纸上

** 若有需要可以取重力加速度 g=10m/s^2 **

1. 用恒力 F 恰好将质量为 M 的滑块沿斜面向上移动到高度 H 处，然后用恒力 $2F$ 将滑块由高度 H 处沿斜面向下移动。已知向下滑动时滑块与斜面间摩擦系数是向上时的 2 倍，并且设滑块回到初始点时的速度为 v，则 $v^2= k\,(gH)$，其中参数 k=

A. 8 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 5 **E.** 4 **F.** 3

2. 弹簧振子做简谐振动，振子的质量 2kg、振幅 60cm 和最大速度 3m/s，则弹簧刚度为

A. 50 N/m **B.** 60 N/m **C.** 70 N/m **D.** 30 N/cm **E.** 40 N/cm **F.** 50 N/cm

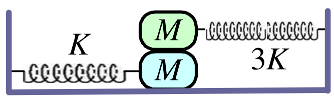
3. (续题 2) 振子在 2/3 振幅位置具有的弹性势能为

A. J **B.** 2J **C.** 3J **D.** 4J **E.** 5J **F.** 6J

4. (续题 3) 振子在 2/3 振幅处的速度为

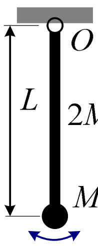
A. 2m/s **B.** $\sqrt{5}$ m/s **C.** $\sqrt{6}$ m/s **D.** $2\sqrt{2}$ m/s **E.** 3m/s **F.** $\sqrt{10}$ m/s

5. 物块-弹簧系统处在平衡状态，此刻刚度为 K 的左弹簧伸展的长度为 x_0 而右弹簧 $3K$ 则没有伸展或压缩。系统置于光滑水平面上。质量均为 M 的物块之间的静摩擦系数为μ，并且系统运动时保持两物块之间没有滑动，则振动可达到的最大幅度 A_{max}=



A. $\frac{\mu Mg}{K}-x_0$ **B.** $\frac{\mu Mg}{K}+x_0$ **C.** $\frac{\mu Mg}{2K}-\frac{3x_0}{2}$ **D.** $\frac{\mu Mg}{2K}+\frac{3x_0}{2}$ **E.** $\frac{\mu Mg}{4K}-2x_0$ **F.** $\frac{\mu Mg}{4K}+2x_0$

(题 6 至 7 的选项同在题 7 之后) 质量为 $2M$ 及长度为 L 的均匀刚杆，上端以光滑铰链 O 系在天花板上以及下端有一质量为 M 的小球，形成一个组合摆。则

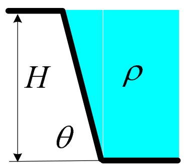


6. 组合摆对转动轴 O 的转动惯量 $I=k_1(ML^2)$，其中 k_1=

7. 组合摆简谐振动频率的平方 $\omega^2=k_2(g/L)$，其中 k_2=

A. 2/5 **B.** 3/5 **C.** 5/9 **D.** 5/6 **E.** 6/5 **F.** 5/3

8. 某高度为H和宽度为B而内壁倾斜角为θ的水坝完全盛满密度为ρ的水。水在侧壁所造成的总压力是



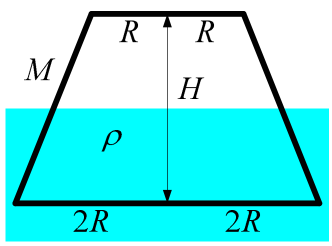
A. $\frac{\rho gBH^2}{\sin\theta}$ **B.** $\frac{\rho gBH^2}{2\sin\theta}$ **C.** $\frac{\rho gBH^2}{\sin^2\theta}$ **D.** $\frac{\rho gB^2H}{\sin\theta}$ **E.** $\frac{\rho gB^2H}{2\sin\theta}$ **F.** $\frac{\rho gB^2H}{\sin^2\theta}$

9. 密度为 0.75g/cm^3 的木球由长度为 50cm 的细绳固定于水中。将木球拉离平衡位置一个很小角度后释放，形成一个倒单摆。若水的阻力不计而密度为 1g/cm^3，木球简谐振动的周期 T=

A. 1.72 s **B.** 1.91 s **C.** 2.15 s **D.** 2.43 s **E.** 2.81 s **F.** 3.34 s

(题 10 至 15 的选项同在题 15 之后)

在密度为ρ 的液体中，静止地浸有密度为P 及质量为 M 的高度为 H、底面半径为 $2R$ 和 R 的圆台。设圆台与液体的密度之比 $k_1= P/\rho$，和圆台受到微小干扰后的振荡频率为ω 并且$\omega^2= k_2\,(g/H)$。



若液体浸到圆台的 1/3 高度处，则 **10.** k_1= **11.** (续题 10) k_2=

若液体浸到圆台的 1/2 高度处，则 **12.** k_1= **13.** (续题 12) k_2=

若液体浸到圆台的 2/3 高度处，则 **14.** k_1= **15.** (续题 14) k_2=

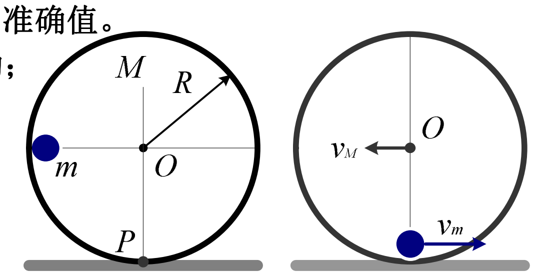
A. 91/189 **B.** 225/91 **C.** 152/189 **D.** 54/37 **E.** 37/56 **F.** 144/152

16. (14分)

质量为m的冰球置于圆心为O、质量为M和半径为R的薄壁圆筒内表面上。

(1) 若薄壁圆筒对过其中心轴O的转动惯量$I_O=k\,(MR^2)$，试求k的准确值。

(2) 薄壁圆筒放置在水平地面上，并且与地面之间没有任何滑动；如左图所示，初时冰球放在与水平地面距离为R的高度位置。冰球被释放后在圆筒内表面上无磨擦地滑动，并且滑动到最低点，如右图所示。假设此时: (a) 冰球的速度为$v_m=X\sqrt{z}$ 和圆筒中心O的速度$v_M=Y\sqrt{z}$，试求参量X、Y和z；(b) 冰球对圆筒内表面压力$P=K(mg)$，试求参量K。(以整数或/及参量M, m, R表示。)



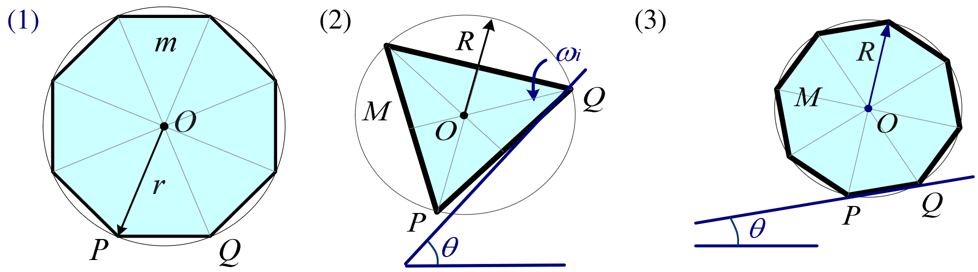
(3) 试计算(a)质量M=m时冰球对圆筒内表面的压力；(b)冰球对圆筒内表面压力P=5mg时的质量比M/m。

17. (24分)

(1) 已知质量为m和外接圆半径为r的正n边形棱柱，对过其中心O且垂直于所在平面的轴的转动惯量

$$I_O=\frac{1}{2}mr^2\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$$

试分别写出正三边形和正八边形棱柱对其中心轴O和角点P的转动惯量I_O和I_P。



(2) 质量为M和外接圆半径为R的正三边形棱柱位于倾角为θ($<60^0$)的斜面上，中心轴线O水平地绕棱边Q转动，设棱边P撞击斜面之前的瞬时角速度为ω_i。试计算棱边P撞击斜面之前瞬时关于P点的角动量L_i的大小和方向，这时棱柱能否接着绕棱边P沿斜面向下滚动？

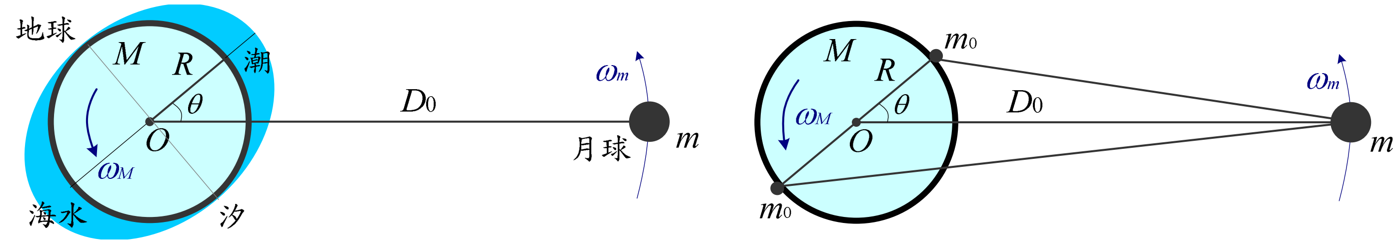
(3) 设有质量为M和外接圆半径为R的正八边形棱柱，最初静止在倾角为θ的斜面上。现在令棱柱沿斜面不均匀地自由滚动下来，其中心轴线始终保持水平，而且在滚下过程中，摩擦力足以阻止该棱柱的任何滑动，使得其棱边在P处与斜面保持良好的接触。**(a)** 设棱边P撞击斜面之前和之后的瞬时角速度分别为ω_i和ω_f。若$\omega_f=k_\omega\omega_i$，试求系数$k_\omega$。**(b)** 设棱边$P$撞击斜面之前和之后的动能分别为$E_i$和$E_f$。若$E_f=kE_i$，试求系数$k$。**(c)** 为使棱柱能够进行接下来的碰撞，$E_i$必须超过一个最小值$E_i^{min}=k_{\min}(MgR)$；并且若前述条件满足时，动能$E_i$将接近一个固定值$E_i^{\max}=k_{\max}(MgR)$，使得薄壁棱柱能够滚下斜面。试以参量$k$、$\theta$和角度$22.5^0$及其三角函数，分别表示系数$k_{\min}$和$k_{\max}$。

(d) 试求出斜面的最小倾斜角度θ_0，使得棱柱的不均匀滚动一旦启动，将无限地继续下去。

18. (32分) **The Earth-Moon system** 地球和月亮系统（简称「地月系统」）

「潮汐」是天体之间万有引力在其各个部位的差异而引起天体形变的一种现象。潮汐对天体的影响，包括地球自转变慢、月亮与地球的距离增大、……等。为研究潮汐现象，我们做如下假设：

(i) 地月系统视月球为质点并且其围绕地球的旋转(即公转)是一个圆形轨道，地球自转轴垂直于月球的公转平面；不考虑太阳的影响。**(ii)** 系统所有转动惯量、力矩和动量矩的计算都关于地球中心的自转轴而不是系统的质量中心。**(iii)** 系统的角动量仅是地球绕自身轴转动角动量和月球关于地球轴公转角动量的总和。**(iv)** 设涨潮线与地月系统的夹角为θ；月球引力引起地球潮汐，$\theta\neq0$时对月球产生力矩，该力矩把角动量由地球自转转移至月球公转。



(1) 地月系统的角动量

设地球质量为M和月球质量m，地球绕自身轴转动的周期为T和转动惯量I_M，地球和月球间的距离为D_0和月球关于地球公转的角频率ω_m。试以(a)参量π,T表示地球绕自转的角频率ω_M；(b)参量m,D_0表示月球公转的转动惯量I_m；(c) 参量$I_M,\omega_M,I_m,\omega_m$表示地月系统的角动量$L_0$。(d) 已知$M=6\times10^{24}$kg和$m=7.3\times10^{22}$kg;$T=24\times3{,}600$s和$I_M=8.0\times10^{37}$ kg m^2;$D_0=3.8\times10^8$m和$\omega_m=2.7\times10^{-6}$ rad/s，试计算ω_M,I_m和L_0。

(2) $\theta=0$时的地月距离D_1和地月系统的角频率ω_1

如果夹角$\theta=0$，月球的万有引力在地球引起的涨潮线，位于地球和月球间的联机上，地球的自转和月球的公转具有相同的角频率ω_1，以及地球和月球间的距离为D_1。试

(a) 以参量I_M,m,D_1,ω_1表示地月系统此刻的角动量L_1；**(b)** 若略去地球自转对总体角动量的影响，以参量m,D_1,ω_1表示地月系统的角动量L_1。**(c)** 由角动量守恒定律，写出描述参量ω_1和D_1关系的表达式；

(d) 由开普勒第三定律，写出描述参量ω_1和D_1关系的另一表达式。

(e) 联立问题(b)和(c)中表达式，以参量G,M,m,L_0分别表示地月距离D_1和地月系统角频率ω_1；

(f) 已知万有引力常数$G=6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}，计算D_1和ω_1。(计算结果取3位有效数字)

(g) 分别计算地球自转角动量和月球公转角动量，以验证地球自转对总体角动量的影响可以忽略不计。

(3) 当$\theta\neq0$时引入潮涨线两端的点质量m_0来近似地描述潮汐现象，点质量引起潮汐力矩。试以参量G,m,m_0,R,D_0,θ 表示 (a) 月球对于近端和远程的点质量m_0产生的万有引力F_c和F_f；

(b) 万有引力F_c和F_f 到地球中心O的矩离d_c和d_f。

(c) 近端和远程的点质量m_0在月球上产生的合力矩$\Delta\tau$; [若有需要，可使用近似公式$(1\pm x)^k=1\pm kx$ 如果$x<<1$]

(d) 设地球半径$R=6.4\times10^6$m、点质量$m_0=3.6\times10^{16}$kg和$\theta=3^0$，计算潮汐力矩$\Delta\tau$。(计算结果取3位有效数字)

编号:________ 姓名:____________ 学校:______________________________ 年级:______ 得分:___________/100分

2021 年第 17 届泛珠赛力学基础试 答题纸 (5 月 15 日)

选择题 (15×2 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

16. (14 分)

简答:

填写:

(1)	薄壁圆筒对过其中心轴O的转动惯量$I_O = k\,(MR^2)$ 其中k=____________. (给出准确值)
(2) 9分	(a) 冰球的速度为$v_m = X\sqrt{z}$ 和圆筒中心O的速度$v_M = Y\sqrt{z}$，其中 X=_____ (给出准确值)，参量Y=________(以M,m表示)和z=_____________(以M,m,R表示); (b) 冰球对圆筒内表面的压力$P = K\,(mg)$，其中参量K=__________________(以M,m表示)。
(3) 4分	(a) 质量$M=m$时冰球对圆筒内表面的压力P=________________ mg (给出准确值); (b) 冰球对圆筒内表面压力$P=5mg$时的质量m=________________M (给出准确值)。

17. (24 分)

简答:

填写:

(1) 4分	正三边形 转动惯量I_O=_________MR^2 和 I_P=__________MR^2 (给出准确值); 正八边形 转动惯量I_O=_________MR^2 和 I_P=__________MR^2 (给出小数点后2位有效数字);
(2) 5分	角动量大小L_i= _________$MR^2\omega_i$ (给出准确值)和方向，即相对于P点(顺/逆) ______时针; 棱柱(能够/不能)_________ 继续绕P点逆时针向下滚动.
(3) 15分	(a) 角速度$\omega_f = k_\omega \omega_i$ 其中k_ω=__________; (给出3位有效数字) (b) 动能$E_f = kE_i$ 其中 k=_____________. (给出3位有效数字) (c) (以参量k、θ 和角度22.5^0及其三角函数表示) $E_i^{min} = k_{\min} MgR$ 其中$k_{\min}$=__________________和$E_i^{\max} = k_{\max} MgR$ 其中$k_{\max}$=_____________; (d) 斜面的最小倾斜角度θ_0=________________. (给出3位有效数字)

编号:________ 姓名:________ 学校:________ 年级:________

18. (32 分)

简答:

填写:

(1) 6分	(a) 地球自转的角频率 (以π,T表示) ω_M=________;	(b) 月球公转的转动惯量 (以m,D_0表示) I_m= ________;	(c) 地月系统的角动量 (以I_M,I_m,ω_M,ω_m表示) L_0=________.
	(d) (取3位有效数字) ω_M=______ $\times10^{-5}$rad/s; I_m=______ $\times10^{40}$kg·m^2; L_0=______ $\times10^{34}$kg·m^2/s.		
(2) 14分	(a) 地月系统的角动量 (以I_M, m,D_1,ω_1表示) L_1=________;	(b) 略去地球自转对总体角动量的影响 (以m,D_1,ω_1表示) L_1=________.	
	(c) 由角动量守恒定律 (以m,D_1,ω_1表示) L_1=________;	(d) 由开普勒第三定律 (以D_1,ω_1表示) GM=________.	
	(e) 地月距离和地月系统角频率 (以G,M,m,L_0表示) D_1=________和ω_1=________;		
	(f) (取3位有效数字) 地月距离D_1=______ $\times10^{8}$m 和地月系统角频率ω_1=______ $\times10^{-6}$rad/s.		
	(g) 角动量: (取3位有效数字) 地球自转L_{M1}=______ $\times10^{32}$kg·m^{2}rad/s和月球公转L_{m1}=______ $\times10^{32}$kg·m^2/s=______ L_{M1}>>L_{M1}.		
(3) 12分	(a) 月球对于近端和远程的点质量m_0产生的万有引力 (以G,m,m_0,D_0,R,θ 表示) F_c=________和F_f =________.		
	(b) 万有引力F_c,和F_f 到地球中心O的矩离 (以G,m,m_0,D_0,R,θ表示) d_c=________和d_f=________.		
	(c) 月球对于近端和远程的点质量m_0产生的潮汐力矩 $\Delta\tau$=________.(以G,m,m_0,D_0,R,θ表示)	(d) (取3位有效数字) $\Delta\tau$=______ $\times10^{16}$N·m.	