2021 年第 17 届泛珠三角物理奥林匹克暨中華名校邀請賽力學基礎試
答案和詳細解答

【答案】(选择题 15×2 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	A	D	B	A	F	E	B	D	A	B	E	D	C	F

【详细解答】

1. 用恒力 F 恰好将质量为 M 的滑块沿斜面向上移动到高度 H 处，然后用恒力 $2F$ 将滑块由高度 H 处沿斜面向下移动。已知向下滑动时滑块与斜面间摩擦系数是向上时的 2 倍，并且设滑块回到初始点时的速度为 v，则 $v^2 = k\,(gH)$，其中参数 k=

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5　　E. 4　　F. 3

功能原理$\Sigma W=\Delta E$：沿斜面向上 $W_F-W_f=MgH$；沿斜面向下 $2(W_F-W_f)=E_k-MgH$

$\Rightarrow E_k=3MgH=\frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v^2=6gH \Rightarrow k=\underline{6}$.

2. 弹簧振子做简谐振动，振子的质量 2kg、振幅 60cm 和最大速度 3m/s，则弹簧刚度为

A. 50 N/m　　B. 60 N/m　　C. 70 N/m　　D. 30 N/cm　　E. 40 N/cm　　F. 50 N/cm

3. (续题 2) 振子在 2/3 振幅位置具有的弹性势能为

A. J　　B. 2J　　C. 3J　　D. 4J　　E. 5J　　F. 6J

4. (续题 3) 振子在 2/3 振幅处的速度为

A. 2m/s　　B. $\sqrt{5}$ m/s　　C. $\sqrt{6}$ m/s　　D. $2\sqrt{2}$ m/s　　E. 3m/s　　F. $\sqrt{10}$ m/s

振幅 A=60cm=0.6m 和系统的总机械能 $E=E_k(x=0)=\frac{1}{2}Mv_{max}^2=\frac{1}{2}\times2\times3^2$=9J=9kg m^2/s^2.

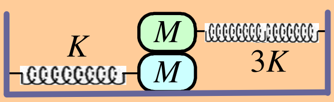
(1) 机械能守恒 $E_k(x=0)=E_k(x)+E_p(x)=E_p(x=A)=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}k\,(0.6\text{m})^2=0.18k(\text{m}^2)$ =9N-m $\Rightarrow k=\underline{50}$N/m.

(2) 振子在 2/3 振幅即 x=0.6×2/3=0.4m 位置具有弹性势能 $E_p(x)=\frac{1}{2}\times50\times(0.4)^2=\underline{4}$J.

(3) 动能 $E_k(x)=E-E_p(x)=9-4=5\text{J}=\frac{1}{2}Mv=\frac{1}{2}\times2\,v^2$. ∴ 振子当 x=0.4m 的速度 $v=\underline{\sqrt{5}}$ m/s.

5. 一物块-弹簧系统处在平衡状态，此刻左弹簧 K 伸展的长度为 x_0 而右弹簧 $3K$ 则没有伸展或压缩。系统置于光滑水平面上。质量均为 M 的物块之间的静摩擦系数为 。若系统运动时保持两物块之间没有滑动，则振动可达到的最大幅度 A_{max}=

A. $\frac{\mu Mg}{K}-x_0$　　B. $\frac{\mu Mg}{K}+x_0$　　C. $\frac{\mu Mg}{2K}-\frac{3x_0}{2}$　　D. $\frac{\mu Mg}{2K}+\frac{3x_0}{2}$　　E. $\frac{\mu Mg}{3K}-2x_0$　　F. $\frac{\mu Mg}{3K}+2x_0$



系统弹簧等效刚度 $k_{eq}=K+3K=4K$ 和等效质量 $m_{eq}=2M$.

设物块位移 x 和加速度 a，应用牛顿定律于 (i)物块系统$-k_{eq}x=m_{eq}a \Rightarrow -4Kx=(2M)a \Rightarrow Ma=-2Kx$; (ii)下面物块 $K(x_0-x)-f=Ma$，其中摩擦力 $f\le\mu N=\mu Mg \Rightarrow K(x_0-x)=f-2Kx \Rightarrow K(x_0-x)\le\mu Mg-2Kx$.

$$\therefore\ x\le\frac{\mu Mg}{K}-x_0=A_{max}.$$

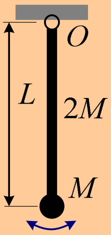
(题 6 至 7 的选项同在题 7 之后)

质量为 $2M$ 及长度为 L 的均匀刚杆，上端以光滑铰链 O 系在天花板上以及下端有一质量为 M 的小球，形成一个组合摆。则

6. 组合摆对转动轴 O 的转动惯量 $I=k_1(ML^2)$，其中 k_1=

7. 组合摆简谐振动的频率 $\omega^2=k_2(g/L)$，其中 k_2=

A. 2/5　　B. 3/5　　C. 5/9　　D. 5/6　　E. 6/5　　F. 5/3



(1) $I=\dfrac{(2M)L^2}{3}+ML^2=\underline{\dfrac{5}{3}}ML^2.$

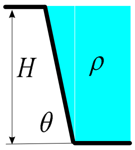
(2) 能量法: $E_p=(2M)g(L/2)(1-\cos\theta)+MgL(1-\cos\theta)\approx\frac{1}{2}(2MgL)\theta^2$, $B=2MgL$;

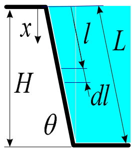
$$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(\frac{5}{3}ML^2)\omega^2,\quad A=\frac{5ML^2}{3}.\ \therefore\ \omega^2=\frac{B}{A}=\frac{6}{\underline{5}}\cdot\frac{g}{L}.$$

解析法: $\tau=-I\alpha\Rightarrow 2MgL\theta=-\dfrac{5ML^2}{3}\alpha,\ \alpha+\omega^2\theta=0$, 其中 $\omega^2=\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{g}{L}$.

8. 高度为H和宽度为B而内壁倾斜角为θ的水坝完全盛满密度为ρ的水。水在侧壁所造成的总压力是

A. $\dfrac{\rho gBH^2}{\sin\theta}$ B. $\dfrac{\rho gBH^2}{2\sin\theta}$ C. $\dfrac{\rho gBH^2}{\sin^2\theta}$ D. $\dfrac{\rho gB^2H}{\sin\theta}$ E. $\dfrac{\rho gB^2H}{2\sin\theta}$ F. $\dfrac{\rho gB^2H}{\sin^2\theta}$





解法1: $x=l\sin\theta$ 其中$0\le x\le H$, $0\le l\le L$和$H=L\sin\theta$. $p=\rho gx=\rho gl\sin\theta$, $dA=Bdl$, $dP=pdA=\rho gB\sin\theta(ldl)$.

$$P=\int_0^L dP=\rho gB\sin\theta\int_0^L ldl=\frac{\rho gB\sin\theta}{2}\left[l^2\right]_0^L=\frac{\rho gBL^2\sin\theta}{2}=\frac{\rho gBH^2}{2\sin\theta}.$$

解法2: $\bar{p}=\rho g\dfrac{H}{2}$, $A_\perp=\dfrac{BH}{\sin\theta}$, $P=\bar{p}A_\perp=\rho g\dfrac{H}{2}\cdot\dfrac{BH}{\sin\theta}=\underline{\dfrac{\rho gBH^2}{2\sin\theta}}$.

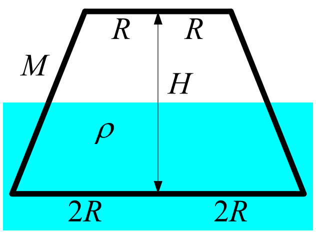
9. 密度为 0.75g/cm^3 的木球由长度为 50cm 的细绳固定于水中。将木球拉离平衡位置一个很小角度后释放，形成一个倒单摆。若水的阻力不计而密度为 1g/cm^3，木球简谐振动的周期 T=

A. 1.72s B. 1.91s C. 2.15s D. 2.43s E. 2.81s F. 3.34s

ρ=0.75g/cm^3,ρ_0=1g/cm^3,L=0.5m. 倒单摆的等效加速度

$$g_e=\frac{F}{m}=\frac{f-mg}{m}=\frac{\rho_0gV-\rho gV}{\rho V}=\frac{\rho_0-\rho}{\rho}g=\frac{1-0.75}{0.75}\times10=\frac{10}{3}\ \text{m/s}^2,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g_e}}=\sqrt{0.5\times\frac{3}{10}}=\underline{2.4335\text{s}}.$$

(题 10 至 15 的选项同在题 15 之后) 在密度为ρ的液体中，静止地浸有密度为P及质量为 M 的高度为 H、底面半径为 $2R$ 和 R 的圆台。设圆台与液体的密度之比 $k_1=\dfrac{P}{\rho}$，和圆台受到微小干扰后的振荡频率$\omega^2=k_2(\dfrac{g}{R})$。



若液体浸到圆台的 1/3 高度处，则 **10.** k_1= **11.** (续题 10) k_2=

若液体浸到圆台的 1/2 高度处，则 **12.** k_1= **13.** (续题 12) k_2=

若液体浸到圆台的 2/3 高度处，则 **14.** k_1= **15.** (续题 14) k_2=

A. $\dfrac{91}{189}$ B. $\dfrac{225}{91}$ C. $\dfrac{152}{189}$ D. $\dfrac{54}{37}$ E. $\dfrac{37}{56}$ F. $\dfrac{144}{152}$

密度为P的圆台体积 $V_0=\frac{1}{3}\pi[R^2+R(2R)+(2R)^2]H=\frac{7}{3}\pi R^2H$，则质量 $M=PV=\frac{7}{3}\pi R^2HP$；

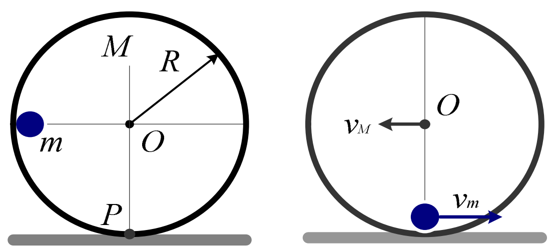
液体对物体的浮力 $f=\rho Vg$ 其中 V 为浸在液体内体积. 由阿基米得定理 $f=G$ 即 $\rho gV=PV_0g$

$\Rightarrow PV_0=\rho V\Rightarrow$ 密度之比 $\frac{P}{\rho}=\frac{V}{V_0}$. $dV=Adx$, $df=\rho gdV$, $k=\frac{df}{dx}=\frac{\rho gAdx}{dx}=\rho gA$.

液体浸到圆台高度		1/3	1/2	2/3
平衡时	浸在液体内体积 V=	$\frac{91}{81}\pi R^2H$	$\frac{37}{24}\pi R^2H$	$\frac{152}{81}\pi R^2H$
	密度比=	$\underline{\frac{91}{189}}$	$\underline{\frac{37}{56}}$	$\underline{\frac{152}{189}}$
	质量 $M=\rho V$=	$\frac{91}{81}\pi R^2H\rho$	$\frac{37}{24}\pi R^2H\rho$	$\frac{152}{81}\pi R^2H\rho$
圆台向下微小位移 x 后	浸在液体内体积变化ΔV=	$\pi(\frac{5R}{3})^2x=\frac{25}{9}\pi R^2x$	$\pi(\frac{3R}{2})^2x=\frac{9}{4}\pi R^2x$	$\pi(\frac{4R}{3})^2x=\frac{16}{9}\pi R^2x$
	合力$\Sigma F=-\rho g\Delta V=Ma$	$-\rho g\frac{25}{9}\pi R^2x=(\frac{91}{81}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho\frac{9}{4}\pi R^2x=(\frac{37}{24}\pi R^2H\rho)a$	$-\rho g\frac{16}{9}\pi R^2x=(\frac{152}{81}\pi R^2H\rho)a$
	$a+\omega^2x=0$ 其中振荡频率ω^2=	$\underline{\frac{225}{91}}\frac{g}{H}$	$\underline{\frac{54}{37}}\frac{g}{H}$	$\underline{\frac{144}{152}}\frac{g}{H}$

16. (14分)

质量为m的冰球置于圆心为O、质量为M和半径为R的薄壁圆筒内表面上。



(1) 若薄壁圆筒对过其中心轴O的转动惯量$I_O=k(MR^2)$，试求k的精确值。

(2) 薄壁圆筒放置在水平地面上，并且与地面之间没有任何滑动；如左图所示，初时冰球放在与水平地面距离为R的高度位置。冰球被释放后在圆筒内表面上无磨擦地滑动，并且滑动到最低点，如右图所示。假设此时

(a) 冰球的速度为$v_m=X\sqrt{z}$ 和圆筒中心O的速度$v_M=Y\sqrt{z}$，试求参量X、Y和z；

(b) 冰球对圆筒内表面压力$P=K(mg)$，试求参量K。(以整数或/及参量M, m, R表示。)

(3) 试计算(a)质量$M=m$时冰球对圆筒内表面的压力；(b)冰球对圆筒内表面压力$P=5mg$时的质量比。

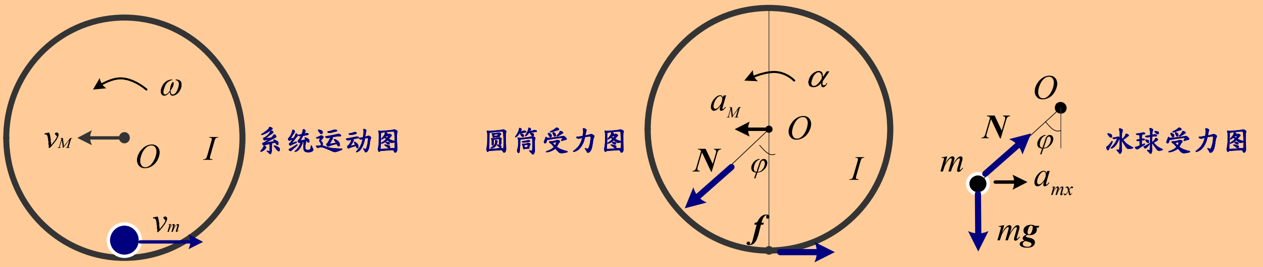
【答案】

(1) 转动惯量 (1分)	薄壁圆筒对过其中心轴O的转动惯量$I_O=k(MR^2)$, $k=\underline{1}$.	1分
(2) 速度和压力 (9分)	(a) 冰球速度为$v_m=X\sqrt{z}$ 和圆筒中心O速度$v_M=Y\sqrt{z}$， 其中参数$X=\underline{2}$，参量$Y=\underline{\frac{m}{M}}$ 和 $z=\underline{\frac{MgR}{2M+m}}$；	1+2+3分
	(b) 冰球对圆筒内表面的压力$P=K(mg)$，其中参量$K=\underline{3+\frac{m}{M}}$.	3分
(3) 速度和压力实例 (4分)	(a) 质量$M=m$时冰球对圆筒内表面的压力 $P=\underline{4}\,mg$；	2分
	(b) 冰球对圆筒内表面压力$P=5mg$时的质量 $m=\underline{2}\,M$.	2分

【详细解答】

(1) 薄壁圆筒对过其中心轴O的转动惯量$I= k\,(MR^2) \Rightarrow k=\underline{1}$. (i)

(2) 冰球滑动到圆筒最低点P时



(a) 由系统运动图有$v_M=R\omega$ 由圆筒受力图有$a_M=R\alpha$ (ii)

$\Sigma\tau_O= fR =I\alpha=(MR^2)\alpha \Rightarrow f=M(R\alpha)=Ma_M$, (iii)

$\Sigma F_x= N\sin\varphi-f =Ma_M \Rightarrow N\sin\varphi=Ma_M+f =2Ma_M$; (iv)

由冰球受力图有 $\Sigma F_x=N\sin\varphi=ma_{mx}=2Ma_M$. (v)

对(v)式两边定积分 $m\int_0^t v_{mx}dt = 2M\int_0^t v_M dt \Rightarrow mv_{mx}=2Mv_M$. (vi)

冰球在圆筒内表面上滑动到最低点时$v_{mx}=v_m$.

系统能量守恒 $mgR = \frac{1}{2}mv_m^{\ 2} + \frac{1}{2}Mv_M^{\ 2} + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_m^{\ 2} + \frac{1}{2}Mv_M^{\ 2} + \frac{1}{2}(MR^2)(\frac{v_M}{R})^2$

$= \frac{1}{2}mv_m^{\ 2} + Mv_M^{\ 2} \Rightarrow mv_m^2+2Mv_M^2 =2mgR$. (vii)

求解式(vi)和(vii)组成的二元二次方程组可得$v_m=2\sqrt{\dfrac{MgR}{2M+m}} = X\sqrt{z}$ 和$v_M=\dfrac{m}{M}\sqrt{\dfrac{MgR}{2M+m}} = Y\sqrt{z}$ (viii)

其中参数$X=\underline{2}$，参量$Y=\dfrac{m}{M}$ 和$z=\dfrac{MgR}{2M+m}$.

(b) 在沿薄壁圆筒中心轴O逐渐滑动的参考系中冰球滑动半径为R及在滑动到最低点时的相对速度$v_r=v_m+v_M=(2+\dfrac{m}{M})\sqrt{\dfrac{MgR}{2M+m}} = \sqrt{(2+\dfrac{m}{M})gR}$ 和相对加速度$a_r=\dfrac{v_r^{\ 2}}{R}=(2+\dfrac{m}{M})g$.

在竖直沿中心轴O方向$\Sigma F=P-mg=ma_r$

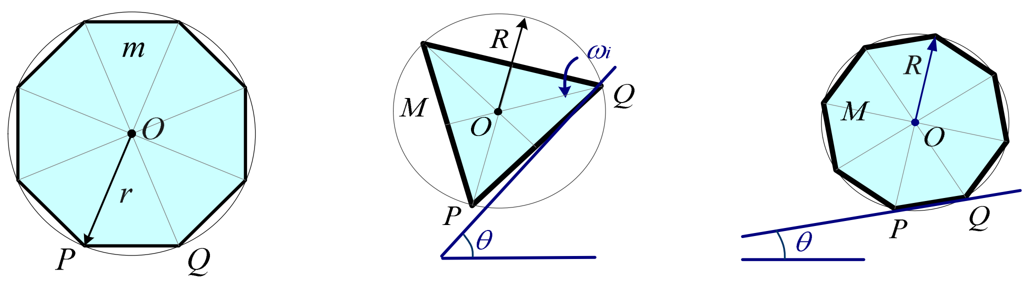
$\Rightarrow$ 圆筒内表面和冰球间的相互作用力$P =m(g+a_r) =(3+\dfrac{m}{M})mg=K\,(mg)$，其中参量$K=3+\dfrac{m}{M}$.

(3) (a) 质量$M=m$时，冰球对圆筒内表面的压力 $P=mg(3+1) = 4\,mg$.

(b) 冰球对圆筒内表面压力$P=5mg$时，即$5mg= (3+\dfrac{m}{M})mg \Rightarrow$ 质量比$\dfrac{m}{M}=2 \Rightarrow$ 质量$m= 2\,M$.

17. (24分)

(1) 已知质量为m和外接圆半径为r的正n边形薄板/棱柱，对过其中心O且垂直于所在平面的轴的转动惯量$I_O=\dfrac{1}{2}mr^2(1-\dfrac{2}{3}\sin^2\dfrac{\pi}{n})$。试分别写出正三边形和正八边形棱柱对其中心轴$O$和角点$P$的转动惯量$I_O$和$I_P$。



(2)　质量为M和外接圆半径为R的正三边形棱柱位于倾角为θ($<60^0$)的斜面上，中心轴线O水平地绕棱边Q转动，设棱边P撞击斜面之前的瞬时角速度为ω_i。试计算棱边P撞击斜面之前瞬时关于P点的角动量L_i的大小和方向，这时刚体能否接着绕棱边P沿斜面向下滚动？

(3)　设有质量为 M 和外接圆半径为 R 的正八边形棱柱，最初静止在倾角为 θ 的斜面上。现在令棱柱沿斜面不均匀地自由滚动下来，其中心轴线始终保持水平，而且在滚下过程中，摩擦力足以阻止该棱柱的任何滑动，使得其棱边在 P 处与斜面保持良好的接触。

(a)　设棱边 P 撞击斜面之前和之后的瞬时角速度分别为 ω_i 和 ω_f。若 $\omega_f=k_\omega\omega_i$，试求系数 k_ω。

(b)　设棱边 P 撞击斜面之前和之后的动能分别为 E_i 和 E_f。若 $E_f=kE_i$，试求系数 k。

(c)　为使棱柱能够进行接下来的碰撞，E_i 必须超过一个最小值 $E_i^{min}=k_{\min}MgR$；并且若前述条件满足时，动能 E_i 将接近一个固定值 $E_i^{\max}=k_{\max}MgR$，使得薄壁棱柱能够滚下斜面。

试以参量 k、θ 和角度 22.5^0 及其三角函数，分别表示系数 $k_{\min}$ 和 $k_{\max}$。

(d)　试求出斜面的最小倾斜角度 θ_0，使得棱柱的不均匀滚动一旦启动，将无限地继续下去。

【答案】

(1) 转动惯量 (4分)	正三边形棱柱 $I_O=\underline{0.25}\,MR^2$ 和 $I_P=\underline{1.25}\,MR^2$ 正八边形棱柱 $I_O=\underline{0.451}\,MR^2$ 和 $I_P=\underline{1.451}\,MR^2$	1+1分 1+1分
(2) 正三边形棱柱（5分）	角动量L_i的大小为 $\underline{0.25}\,MR^2\omega_i$ 和 方向为相对于P点 __顺__ 时针； __不能__ 继续绕P点逆时针向下滚动.	2+1分 2分
(3) 正八边形棱柱（15分）	(a) $k_\omega=\underline{0.798}$; (b) $k=k_\omega^2=\underline{0.637}$. (c) $k_{\min}=\underline{\dfrac{1-\cos(22.5^0-\theta)}{k}}$ 和$k_{\max}=\underline{\dfrac{2\sin 22.5^0\sin\theta}{1-k}}$. (d) $\theta\geq\underline{2.56^0}=\theta_0$.	3+3分 3+3+3分

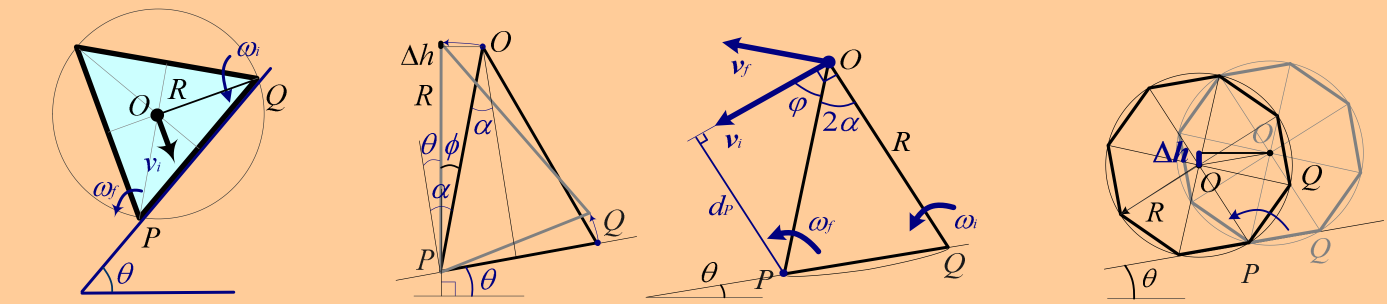
【详细解答】

(1)　正三边形棱柱对其中心轴O和角点P的转动惯量$I_O=\frac{1}{2}MR^2(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}MR^2$和$I_P=\frac{5}{4}MR^2$;

正八边形棱柱对其中心轴O和角点P的转动惯量$I_O=\frac{1}{2}MR^2(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{8})=0.451\,MR^2$和$I_P=1.451\,MR^2$.

(2)　正三边形的角动量$L_i=I_O\omega_i+(Mv_i)(d_P)=(\frac{1}{4}MR^2)\omega_i-M(R\omega_i)(\frac{R}{2}R)=-\frac{1}{4}MR^2\omega_i$.

负值表示与棱柱沿斜面不均匀地向下滚动ω_f 的方向相反，当$\theta<60^0$时棱柱不会沿斜面向下自由滚动.



(1)　　　　(2)　　　　(3)

(a) 棱边 P 撞击斜面之前和之后$\varphi+2\alpha=90^0\Rightarrow\varphi=45^0$.

某一棱边撞击斜面之前关于 P 点的角动量为刚体关于质心 O 的转动角动量与质心 O 的平动角动量之和，即 $L_i=I_O\omega_i+(Mv_i)d_P=I_O\omega_i+M(R\omega_i)(R\sin\varphi)=(0.451+\sin45^0)MR^2\omega_i=1.158\,MR^2\omega_i$

和该棱边撞击斜面之后关于 P 点的角动量 $L_f=1.451I_P\omega_f=1.451\,MR^2\omega_f$.

角动量守恒 $L_i=L_f\Rightarrow\omega_f=k_\omega\omega_i$ 其中 $k_\omega=\dfrac{\omega_f}{\omega_i}=\dfrac{1.158}{1.451}=0.798$.

(b)　某一棱边撞击斜面之前和后的动能$E_i=\frac{1}{2}I_P\omega_i^2$ 和 $E_f=\frac{1}{2}I_P\omega_f^2\ \Rightarrow\dfrac{E_f}{E_i}=(\dfrac{\omega_f}{\omega_i})^2\ \Rightarrow k=(k_\omega)^2=0.637$.

(c) 棱边在斜面 P 点碰撞后棱柱质心 O 至少转动一个角度$\phi=(22.5^0-\theta)$上升到最高位置$\Delta h=R(1-\cos\phi)$.

动能$E_f \geq Mg\Delta h \Rightarrow kE_i \geq MgR(1-\cos\phi)$即$_i \geq MgR(\frac{1-\cos\phi}{k}) \Rightarrow E_i^{min}=k_{min}Mga$,其中$k_{min}=\frac{1-\cos(22.5^0-\theta)}{k}$.

设某一棱边第 n 次撞击斜面之前和之后的动能分别为E_i^n和E_f^n，由题(b)结果有$E_f^n=kE_i^n$.

接下来第 $n+1$ 次碰撞，质量中心会降低一个高度$\Delta h=a\sin\theta$，动能变化$\Delta E=MgR\sin\theta$.

则有$E_i^{n+1}=E_f^n+\Delta E=kE_i^n+Mga\sin\theta$, $n=1,2,3,\ldots$，即

$E_i^2=kE_i^1+\Delta E$, $E_i^3=kE_i^2+\Delta E=k(kE_i^1+\Delta E)+\Delta E=k^2E_i^1+(k+1)\Delta E$,

$E_i^4=kE_i^3+\Delta E=k[k^2E_i^1+(k+1)\Delta E]+\Delta E=k^3E_i^1+(k^2+k+1)\Delta E$, ……,

$E_i^{n+1}=k^nE_i^1+(k^{n-1}+\ldots+k+1)\Delta E,=k^nE_i^1+\frac{1-k^n}{1-k}\Delta E$.

由于 $k<1$ 当 $n\to\infty$, $E_i^{n+1}=\frac{\Delta E}{1-k}=E_i^0 \Rightarrow E_i^0=\frac{\sin\theta}{1-k}Mga=\frac{\sin\theta}{1-k}Mg(2R\sin\alpha)$

$\Rightarrow E_i^{max}=MgR\frac{2\sin\alpha}{1-k}\sin\theta$，其中$k_{max}=\frac{2\sin 22.5^0\sin\theta}{1-k}$.

(d) 要使薄壁棱柱的不均匀滚动无限地继续下去, $E_i^0 \geq E_i^{min}$

$\Rightarrow k_{max} \geq k_{min}$即$\frac{2\sin 22.5^0}{1-k}\sin\theta \geq \frac{1-\cos(22.5^0-\theta)}{k} \Rightarrow \theta \geq 2.558^0$.

18. (32分) **The Earth-Moon system 地球和月亮系统**（简称「**地月系统**」）

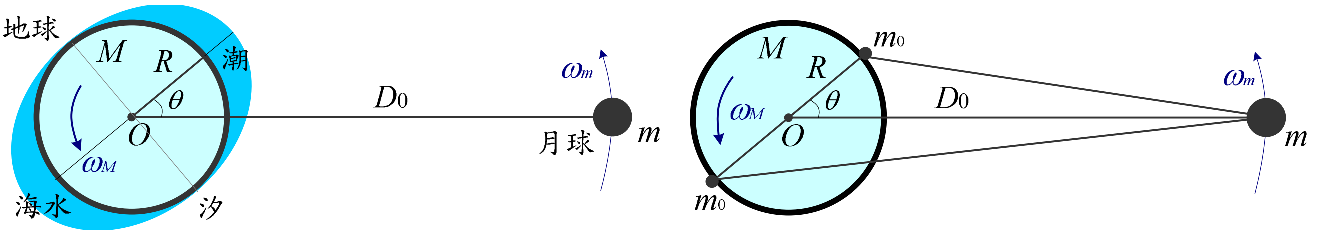
「潮汐」是天体之间万有引力在其各个部位的差异而引起天体形变的一种现象。潮汐对天体的影响，包括地球自转变慢、月亮与地球的距离增大、……，等。为研究潮汐现象，我们在此做如下假设：

(i) 地月系统视月球为质点并且其围绕地球的旋转(即公转)是一个圆形轨道，地球自转轴垂直于月球的公转平面；不考虑太阳的影响。

(ii) 系统所有转动惯量、力矩和动量矩的计算都关于地球中心的自转轴而不是系统的质量中心。

(iii) 系统的角动量仅是地球绕自身轴转动角动量和月球关于地球轴公转角动量的总和。

(iv) 「涨潮线」与地月系统的夹角设为θ; 月球引力引起地球潮汐，$\theta\neq0$时对月球产生力矩，该力矩把角动量由地球自转转移至月球公转。



(1) 地月系统的角动量

设地球质量为M和月球质量m，地球绕自身轴转动的周期为T和转动惯量I_M，地球和月球间的距离为D_0和月球关于地球公转的角频率ω_m。试以(a)参量π,T表示地球绕自转的角频率ω_M；(b)参量m,D_0表示月球公转的转动惯量I_m；(c)参量$I_M,\omega_M,I_m,\omega_m$表示地月系统的角动量$L_0$。(d)已知$M=6\times10^{24}$kg和$m=7.3\times10^{22}$kg;$T=24\times3{,}600$s和$I_M=8.0\times10^{37}$ kg m^2 ;$D_0=3.8\times10^8$m和$\omega_m=2.7\times10^{-6}$ rad/s，试计算ω_M，I_m和L_0(取3位有效数字)。

(2) $\theta=0$时的地月距离D_1和地月系统的角频率ω_1

如果夹角$\theta=0$，月球的万有引力在地球引起的涨潮线，位于地球和月球间的联机上，地球的自转和月球的公转具有相同的角频率ω_1，以及地球和月球间的距离为D_1。试

(a) 以参量I_M, m, D_1, ω_1表示地月系统此刻的角动量L_1；

(b) 若略去地球自转对总体角动量的影响，以参量m,D_1,ω_1表示地月系统的角动量L_1。

(c) 由角动量守恒定律，写出描述参量ω_1和D_1关系的表达式；

(d) 由开普勒第三定律，写出描述参量ω_1和D_1关系的另一表达式。

(e) 联立问题(b)和(c)中表达式，以参量G,M,m,L_0分别表示地月距离D_1和地月系统角频率ω_1；

(f) 已知万有引力常数$G=6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}，计算D_1和ω_1 (计算结果取3位有效数字)。

(g) 分别计算地球自转角动量和月球公转角动量，以验证地球自转对总体角动量的影响可忽略不计。
(3) 当$\theta\neq0$时引入潮涨线两端的点质量m_0来近似地描述潮汐现象，点质量引起潮汐力矩。
若有需要，可使用近似公式$(1\pm x)^k=1\pm kx$如果$x<<1$。试以参量G,m,m_0,R,D_0,θ表示
(a) 月球对于近端和远程的点质量m_0产生的万有引力F_c和F_f;
(b) 万有引力F_c和F_f 到地球中心O的矩离d_c和d_f。
(c) 近端和远程的点质量m_0在月球上产生的合力矩$\Delta\tau$;
(d) 设地球半径R=6.4×10^{6}m、点质量m_0=3.6×10^{16}kg和θ=3^0，计算潮汐力矩$\Delta\tau$。

【答案】（32 分）

(1) 地月系统角动量L_0（6分）	(a) 地球自转的角频率$\omega_M=2\pi/T$; (b) 月球公转的转动惯量$I_m=mD_0^2$; (c) 地月系统的角动量$L_0=I_M\omega_M+I_m\omega_m$. (d) $\omega_M=\underline{7.27}\times10^{-5}$rad/s; $I_m=\underline{1.05}\times10^{40}$kg·m^2; $L_0=\underline{3.43}\times10^{34}$kg·m^2/s.	1+1分 1分 1+1+1分
(2) θ=0 时的地月距离D_1和角频率ω_1（14分）	(a) 地月系统的角动量$L_1=\underline{(I_M\omega_1+mD_1^2)\omega_1}$; (b) 略去地球自转对角动量影响$L_1=\underline{mD_1^2\omega_1}$. (c) 由角动量守恒定律，描述参量$\omega_1$和$D_1$关系的表达式$L_0=\underline{mD_1^2\omega_1}$. (d) 由开普勒第三定律，描述参量$\omega_1$和$D_1$关系的表达式$GM=\underline{D_1^3\omega_1^2}$. (e) 地月距离$D_1=\underline{\dfrac{L_0^2}{GMm^2}}$和地月系统角频率$\omega_1=\dfrac{L_0}{mD_1^2}=\underline{\dfrac{G^2M^2m^2}{L_0^3}}$; (f) 地月距离$D_1=\underline{5.51}\times10^8$m 和地月系统角频率$\omega_1=\underline{1.55}\times10^{-6}$rad/s. (g) 地球自转角动量$L_{M1}$和月球公转角动量$L_{m1}$ $L_{M1}=\underline{1.24}\times10^{32}$kg·m^2 rad /s和$L_{m1}=\underline{344}\times10^{32}$kg·m^2/s $=\underline{277}L_{1M}>>L_{1M}$.	1分 1分 1分 2分 2+2分 1+1分 1+1+1分
(3) $\theta\neq0$时的潮汐现象（12分）	(a) 月球对于近端和远程的点质量m_0产生的万有引力 $F_c=\underline{\dfrac{Gmm_0}{D_0^2+R^2-2D_0R\cos\theta}}$ 和 $F_f=\underline{\dfrac{Gmm_0}{D_0^2+R^2+2D_0R\cos\theta}}$. (b) 万有引力$F_c$,和$F_f$ 到地球中心O的矩离 $d_c=\underline{\dfrac{D_0(R\sin\theta)}{(D_0^2+R^2-2D_0R\cos\theta)^{1/2}}}$ 和 $d_f=\underline{\dfrac{D_0(R\sin\theta)}{(D_0^2+R^2-2D_0R\cos\theta)^{1/2}}}$. (c) 月球对于两个点质量$m_0$产生的合力矩 $\Delta\tau=\underline{\dfrac{3Gmm_0R^2\sin2\theta}{D_0^3}}$; (d) 潮汐力矩 $\Delta\tau=\underline{4.12}\times10^{16}$N.m.	3分 3分 3分 3分

【详细解答】

(1) (a) 地球绕自身轴转动的角频率$\omega_M=\dfrac{2\pi}{T}$;

(b) 月球公转的转动惯量$I_m=mD_0^2$;

(c) 地月系统的角动量$L_0=I_M\omega_M+I_m\omega_m$.

(d) $\omega_M=\dfrac{2\pi}{86,400}=\dfrac{\pi}{0.432}\times10^{-5}=\underline{7.272}\times10^{-5}$rad/s;

$I_m=mD_0^2=(7.3\times10^{22}\text{kg})\times(3.8\times10^8\text{m})^2=\underline{1.054}\times10^{40}$kg m;

$L_0=(8.0\times10^{37}\text{kg·m}^2)\times(7.272\times10^{-5}/\text{s})+(105.4\times10^{38}\text{kg·m}^2)\times(2.7\times10^{-6}/\text{s})=3.428\times10^{34}\text{kg·m}^2/\text{s}$.

(2) (a) 地月系统的角动量$L_1=I_M\omega_1+(mD_1^2)\omega_1$;

(b) 略去地球自转对总体角动量的影响$L_1\approx I_{m1}\omega_1=mD_1^2\omega_1$.

(c) 角动量守恒$L_0=L_1\Rightarrow L_0\approx mD_1^2\omega_1$.

(d) 系统的角频率$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$ 由开普勒第三定律$GM=D_1^3\omega_1^2$.

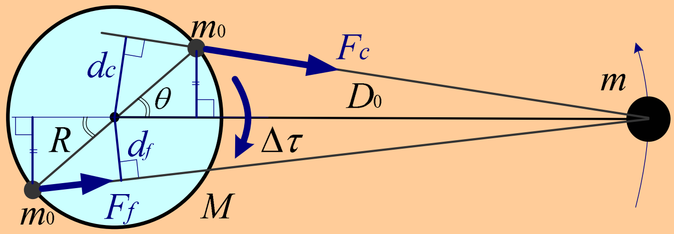
(e) 联立(i)和(ii)式得到地月距离$D_1=\dfrac{L_0^2}{GMm^2}$ 和地月系统角频率$\omega_1=\dfrac{L_0}{mD_1^2}=\dfrac{G^2M^2m^2}{L_0^3}$;

(f) 地月距离$D_1==\dfrac{(3.428\times10^{34}\,\mathrm{kgm^2/s})^2}{(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2})(6\times10^{24}\,\mathrm{kg})\times(7.3\times10^{22}\,\mathrm{kg})^2}=5.5101\times10^8\,\mathrm{m}=1.450D_0$和

地月系统角频率$\omega_1=\dfrac{L_0}{mD_1^2}=\dfrac{3.428\times10^{34}}{(7.3\times10^{22})(5.5101\times10^{8})^2}=1.550\times10^{-6}/\mathrm{s}$ 即$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=4.0537\times10^6=46.92$天.

(g) 地球自转角动量 $L_{M1}=I_M\omega_1=(0.8\times10^{38}\mathrm{kg\cdot m^2})\times(1.55\times10^{-6}/\mathrm{s})=1.24\times10^{32}\mathrm{kg\cdot m^2\ rad/s}$,
月球公转角动量 $L_{m1}=mD_1^2\omega_1=(7.3\times10^{22}\mathrm{kg})\times(5.51\times10^8\mathrm{m})^2\times(1.55\times10^{-6}/\mathrm{s})$
$=343.5\times10^{32}\mathrm{kg\cdot m^2/s}=277L_{M1}>>L_{mf}$, 所以与$L_{m1}$相比, L_{M1}可忽略不计.

(3) 设$c=\dfrac{R}{D_0}=\dfrac{6.4\times10^6}{3.8\times10^8}=1.68421\times10^{-2}<<1$,可使用近似公式 $(1\pm c)^k=1\pm cx$.



(a) 近端点质量m_0在月球上产生的力$F_c=\dfrac{Gmm_0}{D_0^2+R^2-2D_0R\cos\theta}=\dfrac{1}{D_0^2}\cdot\dfrac{Gmm_0}{1+c^2-2c\cos\theta}$,

远程点质量m_0在月球上产生的力$F_f=\dfrac{Gmm_0}{D_0^2+R^2+2D_0R\cos\theta}=\dfrac{1}{D_0^2}\cdot\dfrac{Gmm_0}{1+c^2+2c\cos\theta}$.

(b) 万有引力F_c到地球中心O的矩离$d_c=\dfrac{D_0(R\sin\theta)}{(D_0^2+R^2-2D_0R\cos\theta)^{1/2}}=\dfrac{R\sin\theta}{(1+c^2-2c\cos\theta)^{1/2}}$,

万有引力F_f 到地球中心O的矩离$d_f=\dfrac{D_0(R\sin\theta)}{(D_0^2+R^2+2D_0R\cos\theta)^{1/2}}=\dfrac{R\sin\theta}{(1+c^2+2c\cos\theta)^{1/2}}$.

(c) 合力矩(潮汐力矩)$\Delta\tau=F_c\cdot d_c-F_f\cdot d_f=\dfrac{Gmm_0R\sin\theta}{D_0^2}\cdot[\dfrac{1}{(1+c^2-2c\cos\theta)^{3/2}}-\dfrac{1}{(1+c^2+2c\cos\theta)^{3/2}}]$

$$\approx\frac{Gmm_0R\sin\theta}{D_0^2}\cdot[\frac{1}{(1-2c\cos\theta)^{3/2}}-\frac{1}{(1+2c\cos\theta)^{3/2}}]\approx\frac{Gmm_0R\sin\theta}{D_0^2}\cdot(\frac{1}{1-3c\cos\theta}-\frac{1}{1+3c\cos\theta})$$

$$=\frac{Gmm_0R\sin\theta}{D_0^2}\cdot\frac{(1+3c\cos\theta)-(1-3c\cos\theta)}{(1-3c\cos\theta)(1+3c\cos\theta)}\approx\frac{Gmm_0R\sin\theta(6c\cos\theta)}{D_0^2}=\frac{3Gmm_0cR\sin2\theta}{D_0^2}=\frac{3Gmm_0R^2\sin2\theta}{D_0^3}.$$

(d) 潮汐力矩

$$\Delta\tau=\frac{3\times(6.7\times10^{-11})\times(7.3\times10^{22})\times(3.6\times10^{16})\times(6.4\times10^{6})^2\sin(2\times3^0)}{(3.8\times10^8)^3}=4.122\times10^{16}\,\mathrm{N\cdot m}.$$

- 结束 **End** -