第20届泛珠三角物理奥林匹克暨中华名校邀请赛力学基础试 试题

2024年　月　日 9:30 - 12:30

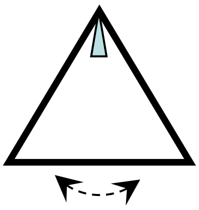
第Ⅰ部分是选择题(共32分，答案唯一)，第ⅠⅠ部分是简答题(共68分)，全部做在答题纸上

** 若有需要 取重力加速度 $g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$ 及 重力常數 $G = 6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}$ **

** 若沒有特別註明　取所有摩擦力為零 **

第Ⅰ部分　选择题 (16x2 分)

(1) 由三根质量为 M、长度为 L 的相同均匀杆组成一个三角形。它通过顶部的枢轴铰接在垂直平面上，见图。 这个物理摆的小振荡周期是多少?



杆子通过其质心的转动惯量为$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$。

A. $\sqrt{\frac{3L}{2g}}$　B. $2\pi\sqrt{\frac{3L}{g}}$　C. $\pi\sqrt{\frac{3L}{g}}$　D. $\pi\sqrt{\frac{3ML}{g}}$　E. $\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{3}L}{g}}$

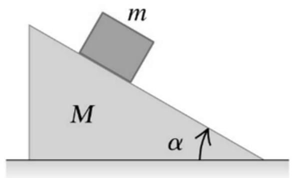
(2) 一辆以 36 m/s 速度行驶的卡车经过一辆以 45 m/s 速度朝相反方向行驶的警车。如果警笛相对于警车的频率为 500 Hz，那么当警车接近卡车时，卡车内的观察者听到的频率是多少? （空气中的声速为 343 m/s。）

A.396Hz　B.636Hz　C.361Hz　D.393Hz　E.617Hz

(3) 一颗卫星绕 X 行星做圆形轨道运行，且轨道距离行星表面非常近。要估计行星 X 的密度，我们只需测量:

A. 卫星的周期　B. 轨道半径　C. 卫星的速度　D. 行星 X 的质量　E. 卫星的质量

(4)-(5) 质量为 M 的三角楔子置于水平无摩擦的地面上。将质量为 m 的木块放在楔子上，如右图所示。木块和楔子之间没有摩擦力。系统从静止状态释放。给定 M=3m 和 α=45°



(4) 求三角楔子加速度的大小。

A. $g/6$　B. $g/7$　C. $g/4$　D. g　E. 0

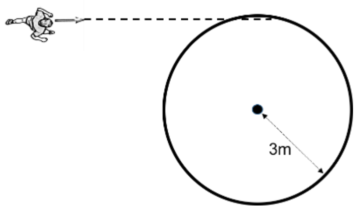
(5) 若当木块滑到地面时，楔子相对地面的速度为 1m/s。求木块在楔子上离地面的初始高度(假设木块为无体积的重点)。　A. 0.60m　B. 0.82m　C. 1.00m　D. 1.05m　E. 1.40m

(6) 在一维运动中，力 F= - (m/b) v^2 作用在质量为 m 的粒子上，其中 v 是粒子的速度，b 是常数。在 t = 0s 时，该粒子位于 x = 0m。哪一个是粒子随时间变化的可能位置?

A. $x(t) = b\ln\left(\frac{t}{1\mathrm{s}}\right)$　B. $x(t) = b\ln\left(\frac{t}{1\mathrm{s}}+1\right)$　C. $x(t) = b\frac{t/1\mathrm{s}}{2+(t/1\mathrm{s})^2}$

D. $x(t) = \frac{b}{t/1\mathrm{s}}$　E. $x(t) = b\sin(t/1\mathrm{s})$

(7)-(8) 一个体重 60 kg 的人以 5 m/s 的初始速度沿着半径为 3 m、质量为 100 kg 的固定均匀圆形平台的切线跑步，如右图所示。平台本来静止，当人跳上及静止在平台上后，平台绕中心的垂直轴旋转。圆形平台通过其质心的转动惯量为$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$。



(7) 求该人跳上平台后系统的角速度。

A. 0.500 rad/s　B. 0.250 rad/s　C. 1.33 rad/s

D. 0.909rad/s　E. 1.705 rad/s

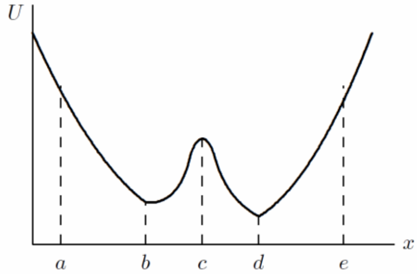
(8)找出总机械能的损失。　A. 150J　B. 341J　C. 257J　D. 457J　E. 0J

(9)-(10)两个 1.0 kg 的粒子以 $(40.0\ \mathrm{ms}^{-1})\hat{\imath}$ 和 $(-20.0\ ms^{-1})\hat{\imath}$ 的速度沿直线相互移动并發生碰撞。碰撞后，其中一个粒子以 30.0 m/s 的速度离开。在碰撞过程中，两颗粒子共损失了 100J 的能量。根据以上情况，回答以下三个问题。

(9) 求碰撞后另一个粒子的速度。　A. 33.2 m/s　B. 36.1 m/s　C. 17.3 m/s　D. 26.8 m/s　E. 30.0 m/s

(10) 求碰撞后粒子速度之间的夹角。 A. 141°　B. 105°　C. 70.5°　D. 96.4°　E. 48.2°

(11)粒子在 x = a 点从静止状态释放，并根据所示的势能函数 U(x) 沿 x 轴移动。图中 U(a) = U(e)。粒子其后的运动为:



A.移动到 x = e 左侧的点，停止并保持静止

B.在 x = a 及 x = e 之间來回移动

C.以不同的速度移动到无穷大($x \to \infty$)

D.移动到 x = b，并保持静止状态

E.移动到 x = e，然后移动到 x = d，并保持静止状态

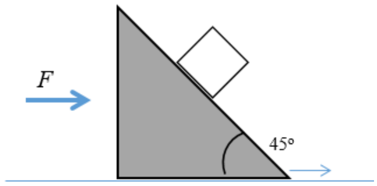
(12)逃离木星引力的最低速度为 60 公里/秒。 假设木星的半径为 70, 000 公里，那么 80 公斤重的宇航员在木星上的重量是多少? A. 1029 N　B. 1371 N　C. 2057 N　D. 2742 N　E. 4114 N

(13)下列哪一个人必须是非惯性观察者?将地面视为惯性系。应考虑空气摩擦力。

I. 一个人的位置被另一个观察者描述为 $y(t)=-\frac{g}{2}t^2$。 II. 坐在固定在地面上旋转的旋转木马边缘的人。
III. 一个人垂直向上跳跃。而此刻，当人处于最高位置时。
IV. 一个人垂直向上跳跃。而此刻，人还在上升的时候。 V. 一个戴着打开的降落伞进行跳伞的人。

A. 只有 I, IV 和 V B. 只有 I 和 II C. 只有 I, II, IV 和 V
D. 只有 II, III 和 IV E. I, II, III, IV 和 V

(14) 右图所示一個 3.0kg 的三角体，求推動三角体的力 F，使在三角块上的 1.0 kg 方形块不会沿斜面移动。假设所有表面都是无摩擦的。

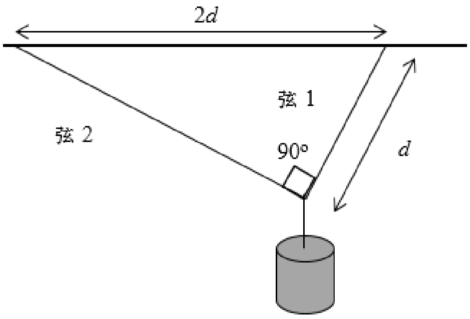


A. 15N B. 20N C. 25N D. 40N E. 45N

(15) 一个边长为 L 的正方体平稳地漂浮在容器内静止的水中。此時有一半的立方体位于水面以下。再将密度为水四分之一的液体添加到容器中，使立方体完全浸没在液体的表面下，而液体和水不混合，液体留在水上面。添加液体后，立方体從原来的水面上升了多少？

A. L/6 B. L/3 C. L/2 D. L/4 E. L/5

(16) 一个盒子由两根具有相同线性质量密度的绳子悬挂在天花板上，如右所示。 求弦 1 的基频f_1 与弦 2 的基频f_2之比，f_1/f_2。



A. $\sqrt{3\sqrt{3}}$ B. 3 C. $3\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$ E. $\sqrt{3}/4$

第 II 部分 简答题 (68 分)

(17) 〔３３分〕质量为 m 的质点附着在力常数为 k 的弹簧上，在粗糙表面上沿 x 轴移动。以原点为弹簧自然长度时的位置。

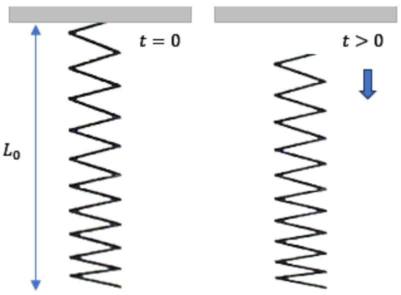
(a) 当 t=0 时，粒子在 $x_0\neq 0$及静止。假设弹簧力足够大，使得粒子在恒定的摩擦力f下移动。在时间$0\leq t\leq\tau$内，求$x(t)$，其中 τ 是t = 0后粒子第一次停止的时间。用 k、m、f 和 x_0 表达您的答案。〔１６分〕

设静摩擦系数为 0.03，动摩擦系数为 0.01，$m\ =\ 1$ kg，$k\ =\ 10$ N/m，重力加速度$g\ =\ 10$ m/s2。

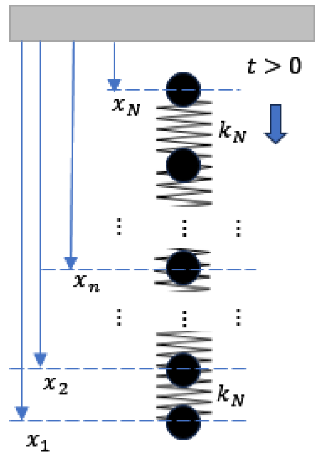
(b) 设 $x_0=1$ m。使用 (a) 或其他方式，找到粒子永久停止时的最终位置。〔８分〕

(c) 求出粒子的总移動距离。〔６分〕

(d) 求粒子永久停止之前所经过的总时间。〔３分〕



(18) 〔３５分〕总质量为 M的弹性弹簧在未拉伸时具有均匀的质量分布。其弹簧常数为K，为简单起见，假设其自然长度为零。现在它从顶端悬挂起来，并在恒定重力g下垂直悬挂并达至静止状态。在 t = 0s 时，顶端从静止状态释放，弹簧落下。为了理解它的下落运动，我们可以将弹簧建模为一系列N 个质量为 m_N 的相同质量，与$N-1$个具有弹簧常数 k_N 和零自然长度的相同弹簧连接。
如右圖中，坐标$x_1,x_2,\cdots x_N$ 分别是距离底部(x_1) 和顶部(x_N)位置的质量，从天花板开始测量 (向下为正)。 在 t = 0s 时，$x_N=0$m。



(a) 求 k_N。答案以 K 表示。〔２分〕
(b) 求释放前处于平衡状态的弹簧的总长度 L_0。答案以M,g 和K表示。〔２分〕
(c) 应用牛顿第二定律，写出顶部 x_N、底部 x_1 和第 n 个质量 x_n 的运动方程，而$1<n<N$，答案以 m_N、k_N、g 以及其他质量的坐标$x_2,x_3,\ldots$ (如果需要) 表示。〔６分〕

现在考虑 N = 2、$m_N=1$kg 且 $k_N=1$N/m 的情况 ($g=10\ \mathrm{ms}^{-2}$)。
(d) 求系统质心的加速度。(向下为正)〔２分〕
(e) 求出两个质量随时间变化的距离函数:$d(t)=x_1(t)-\ x_2(t)$。〔５分〕
(f) 当两个质量碰撞时 (設碰撞时间為τ)，设底部质量从 t=0s 的下降距离为$D_2=x_1(\tau)-x_1(0)=\gamma L_0$。求$\gamma$的数值。〔６分〕

再考虑 N = 3 的情况。
(g) 求出 m_N 和 k_N，使得弹簧的总质量和总弹簧常数 K 与 N=2 的情况相同。〔２分〕
(h) 求解底部质量随时间变化的位置: $x_1(t)$。提示：尝试先找出质心的运动方程，x_1和x_3之间的差的运动方程，及另一个由x_1,x_2及x_3的线性组合组成的量的运动方程。〔８分〕
(i) 底部质量经过(f)部分中的 τ 时间后，求下降的距离$D_3=x_1(\tau)-x_1(0)$。再比较D_3及在(f)部分所得距离D_2，看看哪一个比较小。〔２分〕

无需回答：对于更大的N，模型能更准确地描述实际弹簧。您认为实际弹簧底部的运动会有什么特别？〔不計分〕

--- 全卷完 ---

编号:______ 姓名:______ 学校:______ 年级:______ 得分:____/100 分

2024 年第 20 届泛珠赛力学基础试 答题纸（ 月 日）

第 I 部分 选择题（16×2 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
E	B	A	B	E	B	D	B	E	A	B	C	D	D	A	A

第 II 部分 简答题（68 分）

简答:（請自行决定是否需要写出简要过程。）

得分:(33)

答案:（以下必须填写）

17(a)

情况 1：$x_0 > 0$，运动方程为

$$ma = -kx + f$$

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{f}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{f}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{f}{k}}$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\left(x_0 - \frac{f}{k}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \Rightarrow \text{ for } \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi.$$

情况 2: $x_0 < 0$, 运动方程为

$$ma = -kx - f$$

$$a = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{f}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(x_0 + \frac{f}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{f}{k}}$$

$$\text{for } 0 \le \mathrm{t} \le \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi$$

$x(t) =$

（写出含 k、m、f 和 x_0 的表达式） /16

17(b)

停止的位置:

$$x_0 = 100\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_1 = -98\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_2 = x(\tau) = -\frac{2\mu_k mg}{k} - x_1 = 96\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$\vdots$$

永久停止的条件:

$$-\mu_s mg \le kx \le \mu_s mg$$

$$\Rightarrow -3\frac{\mu_k mg}{k} \le x \le 3\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$or\ -0.03\mathrm{m} \le x \le 0.03\mathrm{m}$$

轉向 49 次后，$x_{49} = -2\frac{\mu_k mg}{k} = -0.02\mathrm{m}$ 满足以上条件。

粒子永久停止时的最终位置 = -0.02 m. /8

17(c)

粒子的总行驶距离 = $4998\frac{\mu_k mg}{k} = 49.98$ m /6

17(d)

粒子永久停止之前所经过的总时间 $= 49\tau = 49\sqrt{\frac{m}{k}}\pi = 48.68$ s /3

编号:____________ 姓名:___________ 学校:______________________________ 年级:_____ 得分:____/100 分

简答:（請自行决定是否需要写出简要过程。）

得分:(35)

	答案:（以下必须填写）	
18(a)	$k_N = (N-1)K$ （写出含N和K 的表达式）	/2
18(b)	$L_0 = \frac{Mg}{2K}$ （写出含M, g和K的表达式）	/2
18(c)	$m_N\ddot{x}_1 = -k_N(x_1 - x_2) + m_N g$ $m_N\ddot{x}_n = k_N(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + m_N g$ $m_N\ddot{x}_N = +k_N(x_{N-1} - x_N) + m_N g$ （写出含m_N、k_N、g 以及其他质量的坐标$x_2, x_3, \dots$（如果需要）的表达式）	/6
18(d)	系统质心的加速度 = $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$	/2
18(e)	$d(t) = g\cos(\sqrt{2}t) = (10\mathrm{m})\cos(\sqrt{2}\,s^{-1}\,t)$	/5
18(f)	请写出主要步骤 $\tau = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi = 1.11\ \mathrm{s}$ $x_1(t) = x_{CM} + \frac{d}{2} = \frac{g}{2} + \frac{g}{2}t^2 + g\cos\sqrt{2}t$ $x_1(0) = L_0 = g = 10\ \mathrm{m}$ $D_2(\tau) = x_1(\tau) - x_1(0) = 0.117\ L_0$ $\gamma = 0.117$	/6
18(g)	$m_N =$ 2/3 kg　　$k_N = 2\mathrm{N/m}$	/2
18(h)	请写出主要步骤 $m_N\ddot{x}_1 = -k_N(x_1 - x_2) + m_N g$ $m_N\ddot{x}_2 = k_N(x_3 - 2x_2 + x_1) + m_N g$ $m_N\ddot{x}_3 = +k_N(x_2 - x_3) + m_N g$ $x_{CM}(t) = \frac{5}{9}g + \frac{1}{2}gt^2$ $d(t) = x_1 - x_3 = g\cos\sqrt{3}\,t$ Let $\xi = x_1 - 2x_2 + x_3$ $\ddot{\xi} = -9\,\xi$ $\xi(t) = -\frac{1}{3}\cos 3t$ $x_1(t) = x_{CM} + \frac{1}{2}d + \frac{1}{6}\xi = \frac{5}{9}g + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{2}\cos\sqrt{3}t - \frac{g}{18}\cos 3t$	/8
18(i)	$D_3 = -\frac{4}{9}g + \frac{1}{2}g\tau^2 + \frac{g}{2}\cos\sqrt{3}\tau - \frac{g}{18}\cos 3\tau = 0.054\ L_O$	/2

Complete Solution of Part II:

Q17

(a) 情况 1：$x_0 > 0$，运动方程为

$$ma = -kx + f$$

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{f}{k}\right)$$

定义

$$X = x - \frac{f}{k}$$

然后

$$a = -\frac{k}{m}X$$

$$X(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

$$\Rightarrow\ x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) + \frac{f}{k}$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

$$x(0) = x_0 = A\cos\phi + \frac{f}{k}$$

$$v(0) = 0 = -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\phi$$

取 $\phi = 0$. 然后

$$A = x_0 - \frac{f}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{f}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{f}{k}$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\left(x_0 - \frac{f}{k}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

for $0 \le t \le \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi$.

情况 1：$x_0 < 0$，运动方程为：

$$ma = -kx - f$$

$$a = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{f}{k}\right)$$

定义

$$X = x + \frac{f}{k}$$

然后

$$a = -\frac{k}{m}X$$

$$X(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) - \frac{f}{k}$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

$$x(0) = x_0 = A\cos\phi - \frac{f}{k}$$

$$v(0) = 0 = -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\phi$$

取 $\phi = 0$. 然后

$$A = x_0 + \frac{f}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{f}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{f}{k}$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\left(x_0 + \frac{f}{k}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

for $0 \le t \le \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi$.

（b） $f=\mu_k mg$

$$x_0>0$$

$$x(t)=\left(x_0-\frac{\mu_k mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_1=x(\tau)=\frac{2\mu_k mg}{k}-x_0$$

$$\frac{\mu_k mg}{k}=0.01\ \mathrm{m}$$

$$x_0=100\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_1=-98\frac{\mu_k mg}{k}$$

将永久停止时

$$-\mu_s mg\le kx\le \mu_s mg$$

$$-3\frac{\mu_k mg}{k}\le x\le 3\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_1<0$$

$$x(t)=\left(x_1+\frac{\mu_k mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)-\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_2=x(\tau)=-\frac{2\mu_k mg}{k}-x_1=96\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$\vdots$$

$$x_{49}=-2\frac{\mu_k mg}{k}$$

最终的位置是 $x=-0.02\,m$.

或者，根据功能定理

$$\frac{1}{2}kx_0^2-\frac{1}{2}kx_1^2=\mu_k mg|x_0-x_1|$$

由于已知粒子将向一个方向运动，因此 $x_1\neq x_0$.

如果 $x_1<x_0$

$$\frac{1}{2}k(x_0+x_1)(x_0-x_1)=\mu_k mg(x_0-x_1)$$

$$x_1=\frac{2\mu_k mg}{k}-x_0$$

$$x_1<x_0\Rightarrow\frac{\mu_k mg}{k}<x_0$$

如果 $x_1 > x_0$

$$\frac{1}{2}k(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = -\mu_k mg(x_0 - x_1)$$

$$x_1 = -\frac{2\mu_k mg}{k} - x_0$$

$$x_1 > x_0 \Rightarrow -\frac{\mu_k mg}{k} > x_0$$

现在

$$x_0 = 100\frac{\mu_k mg}{k}$$

因此

$$x_1 = -98\frac{\mu_k mg}{k}$$

将永久停止时

$$-\mu_s mg \le kx \le \mu_s mg$$

$$-3\frac{\mu_k mg}{k} \le x \le 3\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$x_1 < 0$$

$$x_2 = x(\tau) = -\frac{2\mu_k mg}{k} - x_1 = 96\frac{\mu_k mg}{k}$$

$$\cdots.$$

最终的位置是 $x = -0.02\,m.$

(c) 方法 1:

$(198 + 194 + \cdots 6)\frac{\mu_k mg}{k} = 4998\frac{\mu_k mg}{k} = 49.98\ \mathrm{m}$

方法 2:

$$\frac{\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_{49}^2}{\mu_k mg} = \frac{1}{2}\frac{(100\,\mu_k mg/k)^2 - (-2\,\mu_k mg/k)^2}{\mu_k mg/k} = \frac{100^2 - (-2)^2}{2}\frac{\mu_k mg}{k} = 4998\frac{\mu_k mg}{k} = 49.98\ \mathrm{m}$$

(d) $49\tau = 49\sqrt{\frac{m}{k}}\pi = 49\sqrt{\frac{1}{10}}\pi\ \mathrm{s} = 48.68\ \mathrm{s}$

Q18

(a) 对于整个弹簧，弹簧总伸长 Δx 上的力为 $F = K\,\Delta x$

对于 N-1 弹簧模型，弹簧总伸长 Δx 上的力为 $F = k_N \frac{\Delta x}{N-1}$

由于力必须相同，所以我们得出 $k_N = (N-1)K$

(b) 拉伸弹簧的长度为

$$x_1 - x_2 = \frac{m_N g}{k_N}, \qquad x_2 - x_3 = \frac{2m_N g}{k_N}, \cdots, x_{N-1} - x_N = \frac{(N-1)m_N g}{k_N}$$
$$L_0 = x_1 - x_N = \frac{m_N g}{k_N} + \frac{2m_N g}{k_N} + \cdots + \frac{(N-1)m_N g}{k_N}$$
$$L_0 = \frac{m_N g}{k_N}\frac{(N-1)N}{2} = \frac{Mg}{2K}$$

(c) 质量的运动方程：

$$m_N \ddot{x}_1 = -k_N(x_1 - x_2) + m_N g$$
$$\vdots$$
$$m_N \ddot{x}_n = k_N(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + m_N g$$
$$\vdots$$
$$m_N \ddot{x}_N = +k_N(x_{N-1} - x_N) + m_N g$$

当 N = 2, $m_N = 1\text{kg}, k_N = 1\frac{\text{N}}{\text{m}} = K$

$$L_0 = \frac{2\text{kg}\, g}{2K} = 10\ \text{m}\ (or\ g\ s^2)$$

(d)

$$m_N \ddot{x}_1 = -k_N(x_1 - x_2) + m_N g \qquad (1)$$
$$m_N \ddot{x}_2 = +k_N(x_1 - x_2) + m_N g \qquad (2)$$
$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

取[(1)+(2)] /2

$$m_N\, \ddot{x}_{CM} = m_N g \Rightarrow \ddot{x}_{CM} = g$$
$$x_{CM}(t) = \frac{L_0}{2} + \frac{1}{2}gt^2$$

(e) 让 $d(t) = x_1 - x_2$

取(1) – (2):

$$\ddot{d} = -2\,d$$
$$d(t) = A\cos\sqrt{2}t$$

从初始条件得出$A = L_0$。

(f) 碰撞的时间 τ:

$$d(\tau) = 0$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi = 1.11\ \text{s}$$

$$x_1(t) = x_{CM} + \frac{d}{2} = \frac{g}{2} + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{2}\cos\sqrt{2}t; \quad x_1(0) = L_0 = g$$

$$D_2(t) = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{g}{2}\cos\sqrt{2}t$$

$$D_2(\tau) = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)^2 = 0.117\,L_0$$

$$\gamma = 0.117$$

当 N=3, $m_N = \frac{2}{3}$kg; $M = 2\ kg, K = 1\frac{N}{m}$

(g) $k_N = 2K = 2\frac{N}{m}$; $L_0 = \frac{Mg}{2K} = g$

(h)

$$
\begin{aligned}
m_N \ddot{x}_1 &= -k_N(x_1 - x_2) + m_N g \\
m_N \ddot{x}_2 &= k_N(x_3 - 2x_2 + x_1) + m_N g \\
m_N \ddot{x}_3 &= +k_N(x_2 - x_3) + m_N g
\end{aligned}
$$

考虑以下变数的运动方程

$$
\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\
d &= x_1 - x_3 \\
\xi &= x_1 - 2x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

求解方程後（2 个 SHM 和 1 个恒定加速度），我们得出

$$
\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{5}{9}L_0 + \frac{1}{2}gt^2 \\
d &= x_1 - x_3 = L_0 \cos\sqrt{3}t \\
\xi &= x_1 - 2x_2 + x_3 = -\frac{1}{3}L_0 \cos 3t
\end{aligned}
$$

$$
x_1(t) = \frac{5}{9}L_0 + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{L_0}{2}\cos\sqrt{3}t - \frac{L_0}{18}\cos 3t
$$

(i) $D_3 = \left(\frac{5}{9} - 1\right)L_0 + \frac{1}{2}g\tau^2 + \frac{L_0}{2}\cos\sqrt{3}\tau - \frac{L_0}{18}\cos 3\tau = 0.054L_0 < D_2$