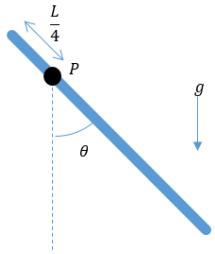
第19届泛珠三角物理奥林匹克暨中华名校邀请赛力学基础试

第Ⅰ部分是选择题(共32分，答案唯一)，第Ⅰ Ⅰ部分是简答题(共68分)，全部做在答题纸上

** 若有需要 取重力加速度 $g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$ **

第Ⅰ部分　选择题　(16x2 分)

问题(1) 和(2) 关注同样的情况。质量为 M、长度为 L 的均匀细杆可以在枢轴 P 处自由转动，如下图所示。杆子通过其质心的转动惯量为$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$。

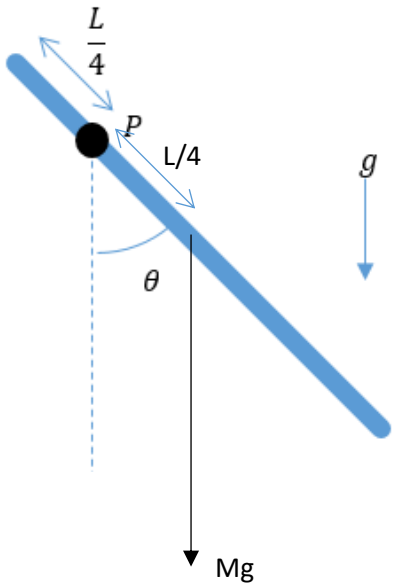


(1) 求杆在松开瞬间的角加速度大小。

A. $\sin\theta\frac{g}{L}$　B. $3\sin\theta\frac{g}{L}$　C. $3\frac{g}{L}$　D. $\frac{12}{7}\sin\theta\frac{g}{L}$　E. $\frac{3}{4}\sin\theta\frac{g}{L}$

(2) 已知初始角度$\theta = 45°$ 及$L = 1\mathrm{m}$.。求当杆垂直时杆的角速度。忽略问题中的摩擦力。

A. 3.14 rad/s　B. 9.84 rad/s　C. 5.76 rad/s　D. 2.89 rad/s　E. 1.25 rad/s



Q1：以 P 点为支点，杆子的转动惯量为

$$I_P = I_{CM} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2$$

牛顿转动定律

$$Mg\frac{L}{4}\sin\theta = I_P\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{12}{7}\frac{g}{L}\sin\theta$$

Q2：杆子转下来时，能量守恒：

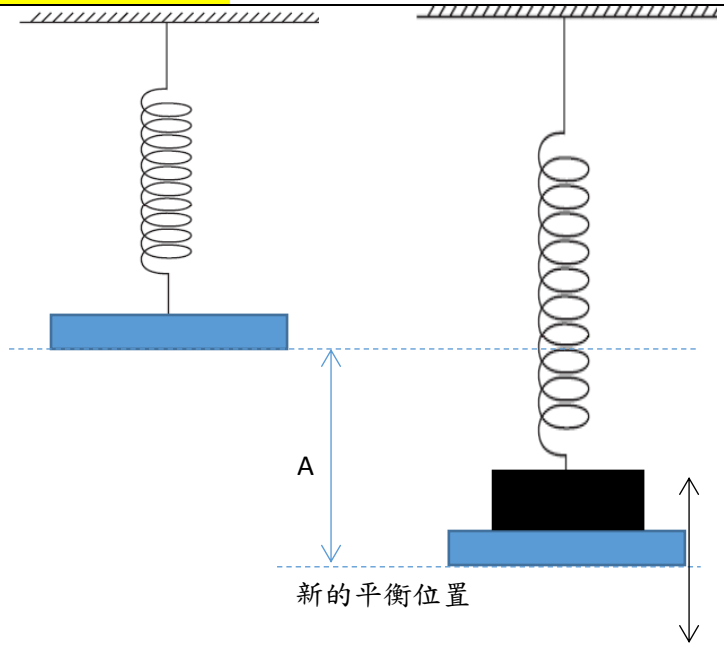
$$Mg\frac{L}{4}(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

$$\omega = \left[\frac{24}{7}\frac{g}{L}(1-\cos 45°)\right]^{\frac{1}{2}} = 3.17\ \mathrm{rad/s}\ (with\ g = 10\ m/s^2)$$

$$or\ \ \omega = 3.14\ \mathrm{rad/s}\ \ (with\ g = 9.8\ m/s^2)$$

(3) 一个弹簧常数为 200N/m 的弹簧垂直悬挂在天花板上。弹簧的下端附有一个 1 公斤的质量块。 1 千克质量最初处于静止状态。在时间 t = 0 s 时，一块 1 千克的粘土粘附到原来的 1 千克质量块上。此组合质量（1 千克质量和 1 千克粘土块）开始从静止状态一起振荡。此振幅和频率为：

A. 0.05m, $1.6\ s^{-1}$　B. 0.1m, $1.6\ s^{-1}$　C. 0.1m, $4.5\ s^{-1}$　D. 0.05m, $4.5\ s^{-1}$　E. 0.05m, $3.1\ s^{-1}$



Q3：加上粘土后的平衡位置向下够动了

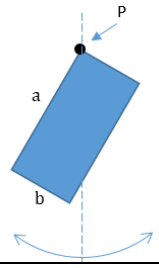
$$A = \frac{1\ kg \times g}{200\ N/m} = 0.05\ m$$

振荡由原本的位置从静止开始，所以本来的位置离新平衡位置的距离 A 是振荡的振幅。

而频率为：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = 1.6\ s^{-1}$$

(4) 质量为 M、尺寸为 a × b 的均匀矩形薄板垂直悬挂在其一个角的枢轴 P 点上，这样它可以在其自身平面内绕枢轴自由旋转。如果它偏离平衡点一个小角度，板将进行简谐运动。垂直于板子并通过其质心的转动惯量为$I_{CM}=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$。简谐运动的周期为



A. $2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$　B. $2\pi\sqrt{\frac{2}{3g}}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$　C. $2\pi\sqrt{\frac{1}{3g}}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$

D. $2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$　E. $2\pi\sqrt{\frac{2M}{3g}}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$

Q4：

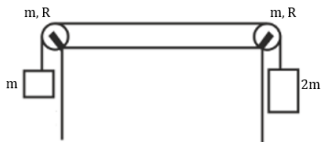
围绕着 P 点转动惯量：$I_P=I_{CM}+M\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$

P 点到质心的距离：$d=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

物理钟摆的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_P}{Mgd}}=2\pi\sqrt{\frac{2}{3g}}\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$$

(5) 考虑如下图所示的滑轮和质量系统。两个滑轮是相同的均匀圆柱圆盘，质量为 m，半径为 R。质量在重力作用下释放。假设绳子不会在滑轮上滑动。求质量为 2m 的加速度。



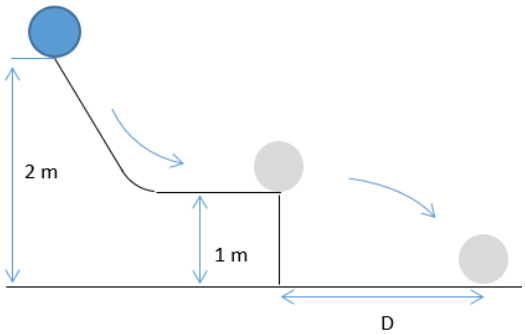
A. g/3　B. g/2　C. g　D. g/5　E. g/4

设左、上 和 右绳子的拉力分别为 T_1,T_2 和 T_3。用牛顿第二定律及牛顿转动定律得出：

$$T_1-mg=ma$$
$$T_2-T_1=I\alpha=\frac{1}{2}ma,\qquad I=\frac{1}{2}mR^2,\qquad \alpha=\frac{a}{R}$$
$$T_3-T_2=I\alpha=\frac{1}{2}ma$$
$$2mg-T_3=2ma$$

$$\Rightarrow a=\frac{g}{4}$$

(6)-(7) 一个半径为 r = 20 cm 的均匀实心球体沿斜坡滚动而不会打滑，从静止状态滚落。斜坡的底部连接到一个水平平台，如下图所示。球最终从平台上掉下来并在距离 D 处撞击地面。忽略空气摩擦。通过实心球体质心的转动惯量为$I_{CM}=\frac{2}{5}Mr^2$。实心球体的质量为M。



(6) 求 D 的数值。

A. 1.5 m　B. 2.1 m　C. 1.7 m　D. 2.8 m　E. 2.4 m

(7) 求出球体刚好在撞击地面之前的角速度。

A. 12.5 rad/s　B. 18.9 rad/s　C. 20.8 rad/s

D. 22.1 rad/s　E. 26.5 rad/s

Q6:根据能量守恒：$Mgh=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$

滚动而不打滑得出：$\omega=v/r$

所以 $v=\sqrt{\frac{10}{7}g\,h}=\sqrt{\frac{10}{7}\times10\times1}$

球掉下来留在空中的时间为 $t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$

$$D=vt=\sqrt{\left(\frac{20}{7}\right)}=1.7\text{ m}$$

Q7: $\omega=\frac{v}{r}=18.9\text{ rad s}^{-1}$

(8) 哈雷彗星的轨道周期为 75.2 年，其与太阳的最大距离与最小距离之比（即远日点与近日点之比）为 60.0。它到太阳的最大距离是多少？太阳质量为1.99×10^{30}kg。

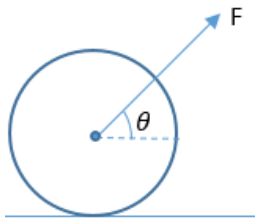
A. 1.13×10^{10} km　B. 2.22×10^{10} km　C. 1.25×10^{9} km　D. 2.67×10^{9} km　E. 5.24×10^{9} km

远日点(r_2)与近日点(r_1)跟太阳的距离相加为 $r_1+r_2=2a$

用开普勒第三定律得出：$T=\frac{2\pi}{\sqrt{GM_s}}a^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow a=\left[\frac{T}{2\pi}\sqrt{GM_s}\right]^{\frac{2}{3}}$

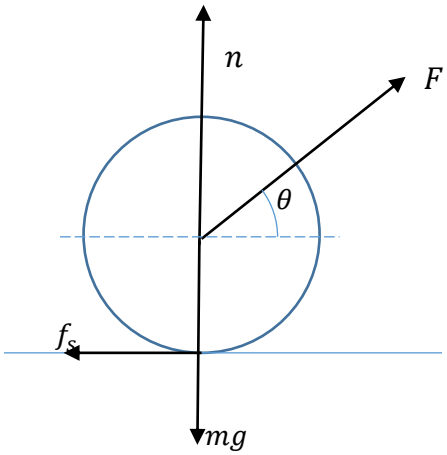
已知 $\frac{r_2}{r_1}=60$，$r_2=\frac{60}{61}\times2a=5.24\times10^{12}\ \mathrm{m}=5.24\times10^{9}\ \mathrm{km}$

(9) 一个大小为 F 的力施加在车轮的质心处。力与水平面成 θ 角。车轮在地面上滚动而不打滑。设 m 为车轮的质量；I_{CM} 为穿过其质心的轴的转动惯量；R 为车轮的半径。找出地面和车轮表面之间的静摩擦系数 μ_s 的最小值。



A. $\frac{I_{CM}F\cos\theta}{(mg-F\sin\theta)(mR^2-I_{CM})}$　B. $\frac{I_{CM}F\cos\theta}{(mg+F\sin\theta)(mR^2-I_{CM})}$　C. $\frac{I_{CM}F\cos\theta}{mg\,(mR^2+I_{CM})}$

D. $\frac{I_{CM}F\cos\theta}{(mg-F\sin\theta)(mR^2+I_{CM})}$　E. $\frac{I_{CM}F\cos\theta}{(mg-F\cos\theta)(mR^2+I_{CM})}$



用牛顿第二定律及牛顿转动定律得出

$$F\cos\theta-f_s=ma$$
$$n+F\sin\theta=mg$$
$$f_sR=I_{CM}\alpha$$

而 $\alpha=\frac{a}{R}$

所以：

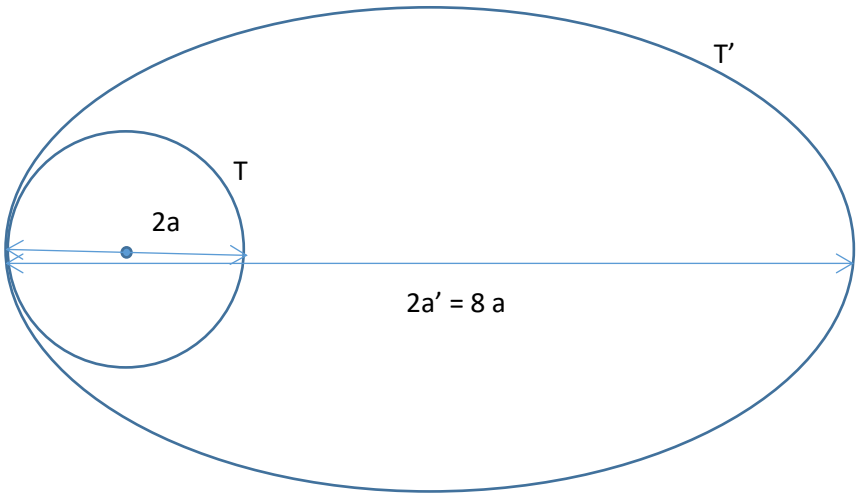
$$a=\frac{F\cos\theta}{m+\frac{I_{CM}}{R^2}}$$

静摩擦力满足 $f_s\le\mu_s n$

$$\mu_s\ge\frac{f_s}{n}=\frac{I_{CM}}{R}\frac{\alpha}{n}=\frac{\frac{I_{CM}}{R^2}\frac{F\cos\theta}{m+\frac{I_{CM}}{R^2}}}{mg-F\sin\theta}$$

$$\mu_s\ge I_{CM}F\cos\frac{\theta}{(mg-F\sin\theta)(mR^2+I_{CM})}$$

(10) 一首航天船最初沿着绕地球以圆形轨道运行，轨道周期为 T。它的火箭沿轨道切线方向短暂发射，然后关闭。随后，航天船进入周期为 8T 的椭圆轨道。设v_H 和 v_L 分别为航天船在新轨道上的最高和最低速度。比值 $\frac{v_H}{v_L}$ 是：　A. 8　B. 7　C. 2　D. 4　E. 5



普勒第三定律：

$$T^2\propto a^3$$

用新旧周期比较得出

$$\frac{a'}{a}=\left(\frac{T'}{T}\right)^{\frac{2}{3}}=(8)^{\frac{2}{3}}=4$$

最高速度发生在近地点，而近地点距离地球 a

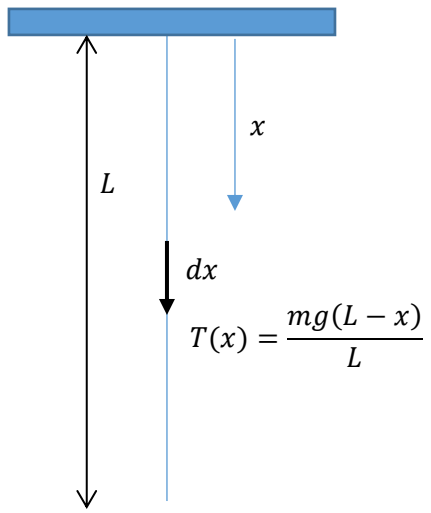
最低速度发生在远地点，而远地点距离地球 7a

根据角动量守恒，$v_Ha=v_L(7a)$

$$\frac{v_H}{v_L}=7$$

(11) 一根质量为 m、长度为 L 的均匀绳索垂直悬挂在天花板上。一个横波沿着绳索长度传递所需的时间 t 为：

A. $t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$　　B. $t = \sqrt{\frac{2L}{mg}}$　　C. $t = \sqrt{\frac{L}{g}}$　　D. $t = \sqrt{\frac{L}{mg}}$　　E. $t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$



由于绳索有质量，绳索每个位置的拉力 $T(x)$ 都要等如该位置以下余下绳索的重量。

波在绳索每小段的传递速度为 $v(x) = \sqrt{\frac{T}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{(L-x)g}$

波经过 dx 的时间为 $dt = \frac{dx}{v(x)} = \frac{dx}{\sqrt{g(L-x)}}$

波由 $x = 0$ 传到 $x = L$ 为

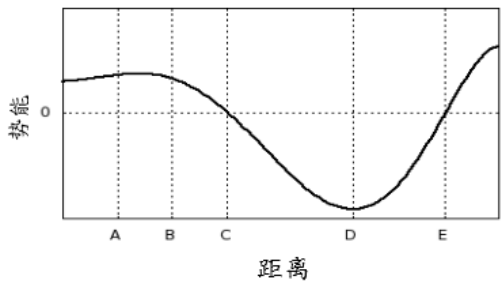
$$\int_{x=0}^{x=L} dt = \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{g(L-x)}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

(12) 一辆正在追赶罪犯车辆的警车以 30.00 m/s 的速度向东行驶，并发出频率为 2800 Hz 的警报器。罪犯的车在警车前面，以 15.00 m/s 的速度向东行驶。已知空气中的声速为 344.0 m/s，求罪犯听到警笛的频率。

A. 3201 Hz　B. 2812 Hz　C. 2934 Hz　D. 2672 Hz　E. 2463 Hz

多普勒效应：$f_L = \frac{344-15}{344-30} 2800\ \text{Hz} = 2934\ \text{Hz}$

(13) 右图中的曲线显示了一个粒子的势能，由于另一个粒子施加在它上面的力，作为距离的函数。图中在哪个标记点处，作用在粒子上的力的大小最大？　A. A 点　B. B 点　C. C 点　D. D 点　E. E 点



在势能图中，斜率越大，力越大，所以 E 点受的力最大。

(14) 当某根橡皮筋被拉伸一段距离 x 时，它会产生一个回弹力 $F = -ax - bx^2$，其中 a 和 b 是常数。为了将这个橡皮筋从 x = 0 拉伸到 x = L 应该做多少功？

A. $aL^2 + bLx^3$　B. $aL + 2bL^2$　C. $-a - 2bL$

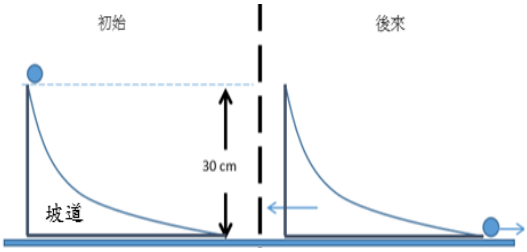
D. $-aL^2/2 - bL^3/3$　E. $aL^2/2 + bL^3/3$

要抵抗回弹力，外力最少要等如 $-F$。所作的功为

$$\int_0^L ax + bx^2\, dx = \frac{a}{2}L^2 + \frac{b}{3}L^3$$

(15) 一个 10 公斤重的球最初静止在一个 10 公斤重的弯曲坡道的顶部。坡道放置在结冰的表面上。然后球被释放并沿着坡道从顶部滑到底部。当球离开坡道时，坡道的速度是多少？忽略任何表面之间的所有摩擦和球的惯性矩。

A. 2.9 m/s　B. 5.2 m/s　C. 1.7 m/s　D. 8.1 m/s　E. 9.8 m/s

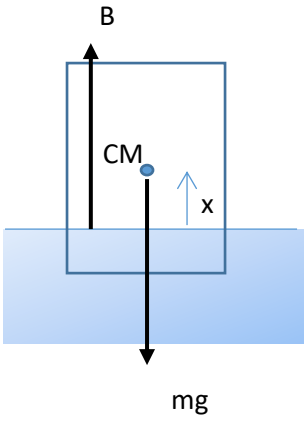


球滑下时，水平方向的动量守恒，所以最后球和坡道都以相同速度移动。同时，能量守恒：

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \times 2$$
$$v = \sqrt{gh} = 1.7\ \mathrm{m/s}$$

(16) 考虑一个尺寸为 AxH 的均匀矩形盒子漂浮在水面上。盒子平行于水面的面积为 A；水的密度为 ρ。盒子的密度为 $\rho/2$。求该盒子在水面上漂浮简谐振荡的周期。

A. $2\pi\sqrt{\frac{g}{H}}$　B. $2\pi\sqrt{\frac{H}{2g}}$　A. $2\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$　D. $2\pi\sqrt{\frac{4H}{5g}}$　E. $\pi\sqrt{\frac{H}{g}}$



图中的盒子受到重力及浮力影响

浮力：$B = \rho A\left(\frac{H}{2} - x\right)g$

重力：$mg = \frac{\rho}{2}AHg$

牛顿第二定律：

$$B - mg = ma$$
$$\Rightarrow \rho A\left(\frac{H}{2} - x\right)g - \frac{\rho}{2}AHg = \frac{\rho}{2}AHa$$
$$\Rightarrow -\rho Agx = \frac{\rho}{2}AHa$$
$$\Rightarrow a = -\frac{2g}{H}x$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{H}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

第 I 部分 选择题（16x2 分）

答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	A	A	B	E	C	B	E	D	B	A	C	E	E	C	B

第 II 部分　简答题（68 分）

（17）考虑雨滴的形成是因为小水滴当在均匀重力下通过具有均匀密度ρ_v的水蒸气介质时，与其通过的水蒸气结合形成更大的雨滴，并获得质量。假设雨滴是球形的及具有均匀的密度ρ_w，并只需考虑重力及水滴与水蒸气结合时的相互作用。

（i）　求当速度为v时，雨滴半径 r 的变化率 $\dot{r}=\frac{dr}{dt}$。

（ii）　用冲量－动量定理去证明 $\frac{\rho_v}{\rho_w}g\,r=12\,\dot{r}^2+4\,r\,\ddot{r}$ 。 注：$\ddot{r}=\frac{d^2r}{dt^2}$

（iii）设 $r=kt^2$ 为(ii)部份等式的解，找出常数 k 的数值。

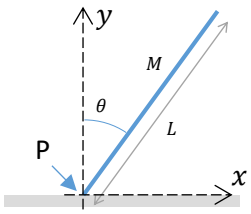
（iv）　求雨滴速度随时间的变化 $v(t)$，假设初始($t=0$)时$r_0=0$ 及 $v_0=0$。

（v）　假设一点 1 克的雨滴是由无穷小的水滴($m_0\sim 0$)落下 1 km 而渐渐形成的。求这 1 克雨滴总机械能量的损失。（提示：雨滴落下时扫过的体积是近似什么几何形状。）

Q17 题解

17(i)	水滴经过水蒸气时, 质量变化为 $\frac{dm}{dt}=\dot{m}=(\text{cross}-\text{section area})\,v\,\rho_v=\pi r^2 v\rho_v$ 同时 $\dot{m}=\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=4\pi r^2\dot{r}$ 得出: $$\dot{r}=\frac{1}{4}\frac{\rho_v}{\rho_w}v$$
17(ii)	水为圆形: $m=\frac{4}{3}\rho_w\pi r^3\Rightarrow\dot{m}=4\pi\rho_w r^2\dot{r}=3m\frac{\dot{r}}{r}$ 由(i) 得: $\dot{v}=4\frac{\rho_w}{\rho_v}\ddot{r}$ 冲量－动量定理: $F_{net}=\frac{dp}{dt}\Rightarrow\boxed{mg=m\dot{v}+\dot{m}v}$ $\Rightarrow\ mg=4\,m\frac{\rho_w}{\rho_v}\ddot{r}+12\,m\frac{\rho_w}{\rho_v}\frac{\dot{r}^2}{r}$ $\Rightarrow\frac{\rho_v}{\rho_w}gr=4\,r\,\ddot{r}+12\,\dot{r}^2$
17(iii)	$k=\frac{1}{56}\frac{\rho_v}{\rho_w}g$ （把$r=kt^2$ 代入 $\frac{\rho_v}{\rho_w}gr=4\,r\,\ddot{r}+12\,\dot{r}^2$）
17(iv)	$v(t)=\frac{1}{7}\,g\,t$ （把 $r=kt^2$ 代入 $\dot{r}=\frac{1}{4}\frac{\rho_v}{\rho_w}v$）
17(v)	雨滴落下时扫过的体积近似什么几何形状:__**圆锥体**____ (因为水滴的加速度为常数，下降的距离y正比t^2 ($y\propto t^2$)，同时其半径也是正比 t^2 ，所以$r\propto y$，故外形为圆锥体。) 设 1 克水滴落下到 1 km 后的位置的重力势能为 $U=0$. 水滴为水蒸气时的总机械能 =__$\frac{mgH}{4}=0.001*10*\frac{1000}{4}=2.5J$ （圆锥体的质心在整个圆锥体 ¼ 的高度） 水滴落到 1 km 下的总机械能 = _$\frac{1}{2}mv^2=\frac{mgH}{7}=1.43$ J （当时水滴只有动能, 由 17(iv)的结果可得出 $v=\sqrt{\frac{2gH}{7}}$） 总机械能量的损失 = ____1.07 J_

（18） 一根均匀的细杆子最初垂直竖立($\theta = 0°$)在粗糙的水平桌子上。它被轻轻碰了一下，然后向右掉落。杆子的质量为 M、长度为 L、对接触点 P 的转动惯量为 $I_P = \frac{1}{3}ML^2$及其与工作台的静摩擦系数为μ_s。本题目的在找出杆子与桌的接触点 P 会否在掉落过程中滑动。



（i） 当 P 点不滑动时，求杆质心此时的加速度矢量$\vec{a}_{CM}$以$L, \theta, \dot{\theta}$及$\ddot{\theta}$表示。
注：$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

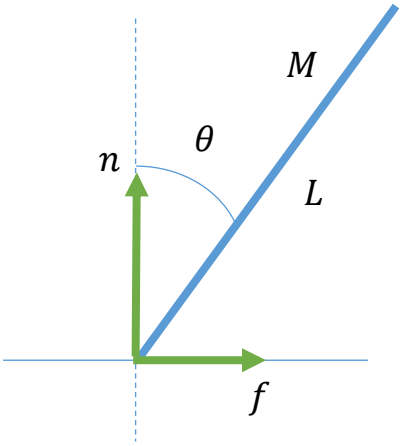
（ii） 用 θ, g, L 来表示 $\dot{\theta}$ 及 $\ddot{\theta}$。

（iii） 假设点 P 从不滑动，求杆和桌子之间作用在杆子的摩擦力作为 θ 的函数 $f(\theta)$。以向右为正，左为负。

（iv） 假设点 P 从不滑动，求桌子对杆子的正向力作为 θ 的函数 $n(\theta)$。以向上为正，下为负。

（v） 找出μ_s使得在杆子掉落时 P 点会分别(甲)向右滑动及(乙)向左滑动的数值范围。

Q18:



質心加速度由**角加速**及**向心加速**相加組成

$$\vec{a}_{CM} = \frac{L}{2}\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\hat{r}$$

$$= \frac{L}{2}\ddot{\theta}(\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath}) - \dot{\theta}^2\frac{L}{2}(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) \quad ---(1)$$

$$\vec{F}_{net} = f\,\hat{\imath} + (n - Mg)\hat{\jmath} = M\vec{a}_{CM} \quad ---(2)$$

根据能量守恒: $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{mgL}{2}(1 - cos\,\theta)$

$$\dot{\theta} = \left[3\frac{g}{L}(1 - \cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}} \quad ---(3)$$

牛顿转动定律得出:$\tau = I\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{L}{2}mg\,sin\,\theta = I\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta \quad ---(4)$$

合併(1), (2), (3), (4) 得出

$$f(\theta) = \frac{3}{4}Mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)$$

$$n(\theta) = \frac{9}{4}Mg\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\right)^2$$

定義

$$\mu(\theta) = \frac{f}{n} = \frac{3\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)}{(3\cos\theta - 1)^2}$$

當 $0 < \theta < \cos^{-1}\frac{2}{3}$ ，f > 0 。因此，如果 f(θ) 大於最大值 μn，它將向左滑動。 靜摩擦力$f_{max} = \mu(\theta)\,n$

求靜摩擦力的最大值等同求最大的μ值, 設

$$\frac{d\mu}{d\theta} = \frac{p(\theta)}{(3\cos\theta - 1)^4} = 0$$

$$\text{where } p(\theta) = 3(3\cos\theta - 1)(11\cos\theta - 9)$$

μ 的最大值出现在 $\cos\theta = \frac{9}{11}$ or $\frac{1}{3}$（排除 1/3 因为 $\cos\theta > \frac{2}{3}$ ）. 因此 μ 的最大值为 $\left(\cos^{-1}\frac{9}{11}\right) = 0.371$

如果静摩擦系数小于 0.371 ，P 点将向左滑动。

当 $\theta > \cos^{-1}\frac{2}{3}$ 时，所需的摩擦力点向左，P 点有向右滑动的意图，而因为 μ 这时没有最大值。加上当 $\theta \to \cos^{-1}\frac{1}{3}$ 时，$|\mu(\theta)| \to \infty$

所以这里不存在任何可以避免 P 点向右滑动的 μ 值。

因此，如果它在$\theta < \cos^{-1}\frac{2}{3}$ 时没向右滑动，则最终必会向左滑动。

18(i)	$\vec{a}_{CM} = \frac{L}{2}\ddot{\theta}(\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath}) - \dot{\theta}^2\frac{L}{2}(\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$
18(ii)	$\dot{\theta} = \left[3\frac{g}{L}(1-\cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$ $\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$
18(iii)	$f(\theta) = \frac{3}{4}Mg\sin\theta\,(3\cos\theta - 2)$
18(iv)	$n(\theta) = \frac{9}{4}Mg\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\right)^2$
18(v)(甲)	杆子掉落时 P 点会向***右***滑动，μ_s的数值范围:（精确到三位有效数字） $\mu > \frac{15\sqrt{10}}{128} = 0.371$
18(v)(乙)	杆子掉落时 P 点会向***左***滑动，μ_s的数值范围:（精确到三位有效数字） $\mu < \frac{15\sqrt{10}}{128} = 0.371$

--- 全卷完 ---