2022 年第 18 屆泛珠三角物理奧林匹克暨中華名校邀請賽力學基礎試
答案和詳細解答

第 I 部分 选择题 **Multiple Choice Questions** (16×2 分)

【答案】

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F	E	D	A	B	C	B	D	C	A	A	F	C	E	D	B

(题 1 至 2) 质点在平面上的碰撞

1. 平面上初始动能为 E_0、质量 m_1 的原子核 1 与另一质量为 m_2 的静止原子核 2 发生碰撞后，以与初速度 v_0 成 90^0 的方向飞出，且飞出动能为 E_1。此时原子核 2 的飞出动能 E_2=

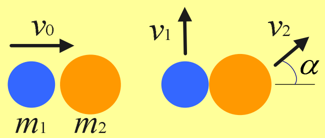
A. E_0-E_1　B. $E_0-\frac{1}{2}E_1$　C. $(E_0-E_1)\frac{m_2}{m_1}$　D. $(E_0-E_1)\frac{m_1}{m_2}$　E. $(E_0+E_1)\frac{m_2}{m_1}$　F $(E_0+E_1)\frac{m_1}{m_2}$

2. (接上题) 设 E_0=18MJ、E_1=6MJ 和 $m_2=3m_1$，则在碰撞过程中由机械能转变为核能的能量 E_n=

A. 0　B. 1MJ　C. 2MJ　D. 3MJ　E. 4MJ　F. 5MJ

【详细解答】

设发生碰撞后静止原子核 2 的速率为 v_2 和方向为 α(>0)，并且 $E_0=\frac{1}{2}m_1v_0^2$，$E_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2$ 及 $E_2=\frac{1}{2}m_2v_2^2$.



(1) 动量守恒 $m_1v_0=m_2v_2\cos\alpha$ 和 $0=m_1v_1+m_2v_2\sin\alpha \Rightarrow v_2\cos\alpha=v_0\frac{m_1}{m_2}$ 和 $v_2\sin\alpha=-v_1\frac{m_1}{m_2}$

$\Rightarrow v_2^2=(v_0^2+v_1^2)(\frac{m_1}{m_2})^2 \Rightarrow E_2=\frac{1}{2}m_2(v_0^2+v_1^2)(\frac{m_1}{m_2})^2=\frac{m_2}{m_1}(\frac{1}{2}m_1v_0^2+\frac{1}{2}m_1v_1^2)(\frac{m_1}{m_2})^2=\underline{(E_0+E_1)\frac{m_1}{m_2}}$.

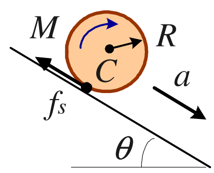
(2) 能量守恒 $E_0=E_1+E_2+E_n \Rightarrow E_n=E_0-E_1-E_2=E_0-E_1-(E_0+E_1)\frac{m_1}{m_2}=18-6-\frac{18+6}{3}$ = <u>4MJ</u> .

(题3至8) 圆球/柱形刚体在斜面上的滚动

如图所示，一个质量 M=2kg 和半径 R=0.25m 的均匀圆球/柱形刚体在倾角 $\theta=30^0$ 的斜面上平稳无滑动地滚动下来。设刚体对其滚动中心轴 C 的转动惯量 $I_c=k(MR^2)$，则有

刚体	(i)球体	(ii)圆柱体	(iii)球壳	(iv)圆柱壳
$k=\frac{I_c}{MR^2}=$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

(说明：壳体的壁厚 $t<<R$.)



3. 刚体滚动时，中心轴 C 的加速度 a=

A. $\frac{g\sin\theta}{3-2k}$　B. $\frac{g\tan\theta}{3-2k}$　C. $\frac{g\tan\theta}{1+k}$　D. $\frac{g\sin\theta}{1+k}$　E. $\frac{g\sin\theta}{k}$　F. $\frac{g\tan\theta}{k}$

(接上题) 当刚体为 **4.**(i)球体 **5.** (ii)圆柱体 **6.**(iii)球壳 时，刚体中心轴 C 滚动的加速度 a= (单位 m/s^2)

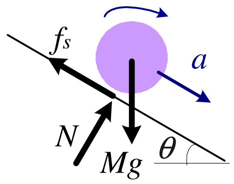
A. 3.57 **B.** 3.33 **C.** 3.00 **D.** 2.50 **E.** 2.25 **F.** 2.15

(接上题) 当刚体为 **7.**(ii)圆柱体 **8.** (iv)圆柱壳 时，其受到斜面的静摩擦力 f_s= (单位 N)

A. 2.86 **B.** 3.33 **C.** 4.00 **D.** 5.00 **E.** 6.5 **F.** 8.5

【详细解答】

刚体的受力和运动状态，如右图所示：



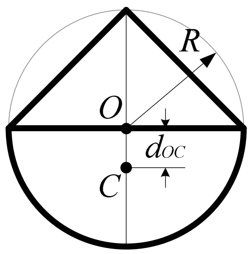
牛顿运动定律 $Mg\sin\theta - f_s = Ma$ 和 牛顿转动定律 $R f_s = I_c\alpha$，其中 $a=R\alpha$

$$\Rightarrow a=\frac{g\sin\theta}{1+I_c/MR^2}=\underline{\frac{g\sin\theta}{1+k}} \quad \text{和} \quad f_s=\frac{I_c}{R^2}a=kMa.$$

θ=30^0, R=0.25m, M=2kg		k=	$a=\frac{g\sin\theta}{1+k}=\frac{5}{1+k}$	f_s=kMa=2 ka
(i)	球体	2/5	=25/7=<u>3.57</u> m/s^2	2×2/5×25/7= 2.86 N
(ii)	圆柱体	1/2	=10/3=<u>3.33</u> m/s^2	2×1/2×10/3= <u>3.33</u> N
(iii)	球壳	2/3	<u>3</u> m/s^2	2×2/3×3= 4.00 N
(iv)	圆柱壳	1	2.5 m/s^2	2×1×2.5= <u>5.00</u> N

(题9至16) 组合形体在液体中于竖直方向受微小扰动后的角频率ω

如图所示，组合体由底半径和高均为R的圆锥体和半径为R的半球体组合而成，则其



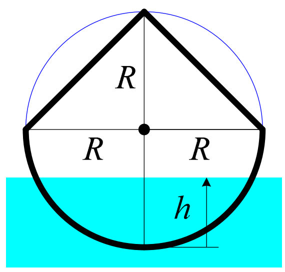
9. 体积V_0= $k_1(\pi R^3)$，其中k_1=

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{4}{3}$ **E.** $\frac{3}{2}$ **F.** $\frac{5}{3}$

10. 形心C的位置d_{OC}= k_2R，其中k_2=

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$ **E.** $\frac{3}{4}$ **F.** $\frac{5}{6}$

上述组合体的密度为P并且静止地浸在密度为ρ的液体中，设组合体与液体的密度之比 $k_3=\frac{P}{\rho}$ 。组合体受到微小干扰后的振荡频率为ω 并且ω^2= $k_4\frac{g}{R}$ 。



设组合体浸在液体内的高度为 h，则当 (题 11 至 16 的选项同在题 16 之后)

h=$\frac{2}{3}R$ 时 **11.** (接题 9) k_3= **12.** (接题 11) k_4=

h=R 时 **13.** (接题 9) k_3= **14.** (接题 13) k_4=

h=$\frac{4}{3}R$ 时 **15.** (接题 9) k_3= **16.** (接题 15) k_4=

A. $\frac{28}{81}$ **B.** $\frac{36}{73}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{73}{81}$ **E.** $\frac{3}{2}$ **F.** $\frac{18}{7}$

【详细解答】

$$d_{OC}=\frac{V_1y_1+V_2y_2}{V_1+V_2}=\frac{(\frac{1}{3}\pi R^3)(\frac{1}{4}R)+(\frac{2}{3}\pi R^3)(-\frac{3}{8}R)}{\pi R^3}=-\frac{1}{6}R\ \Rightarrow \boldsymbol{k_2=\underline{\frac{1}{6}}}.$$

1	圆锥体	$V_1=\frac{1}{3}\pi R^3$	$y_1=\frac{1}{4}R$
2	半球体	$V_2=\frac{2}{3}\pi R^3$	$y_2=-\frac{3}{8}R$
Σ	组合体	$V_1+V_2=\pi R^3\Rightarrow k_1=\underline{1}$	

密度为P的组合体体积 $V_0=\pi R^3$，则质量 $M=PV_0=P(\pi R^3)$.

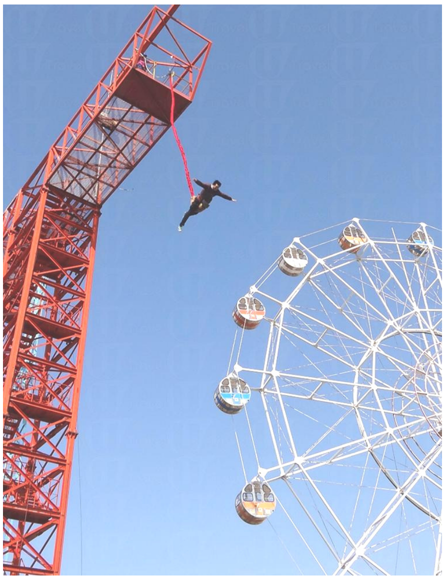
液体对物体的浮力 $f=\rho Vg$ 其中 V 为浸在液体内体积. 由阿基米得定理 $f=G$ 即 $\rho gV=PV_0g$

$\Rightarrow PV_0=\rho V\Rightarrow$ 密度之比 $\frac{P}{\rho}=\frac{V}{V_0}$. $dV=Adx$, $df=\rho gdV$, $k=\frac{df}{dx}=\frac{\rho gAdx}{dx}=\rho gA$.

形体浸在液体的高度		$h=2R/3$	$h=R$	$h=4R/3$
平衡时	浸在液体内的体积 $V=$	$\int_0^{\frac{2R}{2}}\pi(R^2-(R-y)^2)dy=\frac{28}{81}\pi R^3$ (1/3 球体，微积分法)	$\frac{2}{3}\pi R^3$ (1/2 球体)	$\pi R^3-\frac{\pi}{3}(\frac{2}{3}R)^3=\frac{73}{81}\pi R^3$ (1/2 球体+1/3 圆台)
	密度比 $\frac{P}{\rho}=$	$\underline{\frac{28}{81}}$	$\underline{\frac{2}{3}}$	$\underline{\frac{73}{81}}$
	质量 $M=\rho V=$	$\frac{28}{81}\pi R^3\rho$	$\frac{2}{3}\pi R^3\rho$	$\frac{73}{81}\pi R^3\rho$
组合体向下微小位移 x 后	浸在液体内体积变化 $\Delta V=$	$\pi(\sqrt{\frac{8}{9}}R)^2x=\frac{8}{9}\pi R^2x$	πR^2x	$\pi(\frac{2R}{3})^2x=\frac{4}{9}\pi R^2x$
	合力 $\Sigma F=-\rho g\Delta V=Ma$	$-\rho g(\frac{8}{9}\pi R^2x)=(\frac{28}{81}\pi R^3\rho)a$	$-\rho g\pi R^2x=(\frac{2}{3}\pi R^3\rho)a$	$-\rho g\frac{4}{9}\pi R^2x=(\frac{73}{81}\pi R^3\rho)a$
	$a+\omega^2x=0$ 其中振荡频率 $\omega^2=$	$\underline{\frac{18}{7}}\frac{g}{R}$	$\underline{\frac{3}{2}}\frac{g}{R}$	$\underline{\frac{36}{73}}\frac{g}{R}$

第 II 部分 笨猪跳/蹦极跳 **Bungee-Jumping** (28 分)

某质量为 M 且可视为质点的高空跳跃运动员，系在一根质量可忽略不计的长度为 L 和弹性常数为 K 的细长绳索一端，其另一端固定在高空。跳跃者初始静止，然后自高空固定点向下坠落，而且在下落过程中其所受空气阻力忽略不计。



(1) (1 分)跳跃者在下落过程中涉及哪些运动

(i)自由落体运动; (ii)抛体运动; (iii)圆周运动; (iv)简谐振动?

A. (i)和(ii) **B.** (i)和(iii) **C.** (i)和(iv) **D.** (ii)和(iii)

E. (ii)和(iv) **F.** (iii)和(iv) **G.** (i),(ii)和(iv) **H.** (i),(iii)和(iv)

(2) (6 分) 绳索和跳跃者组成一个弹簧振子系统。并且已知 M=75kg、L=45m 和 K=150N/m，试

(a) 计算系统简谐振动的固有频率 ω 和固有周期 T；

(给出精确解，可含 π,根号,…等)

(b) 写出绳索弹性力 F 和弹性势能 E_p 的表达式，设绳索伸长为 x。

(3) (3×7 分) 试导出和/或计算跳跃者在第一次达到瞬时静止前

(a) 落下距离 X 的表达式及其数值；

(b) 落下过程中所达到最大速率 V 的表达式及其数值；

(c) 所经历时间 t 的数值。

【答案】

(1)	跳跃者在下落过程中，涉及哪些运动？ 自由落体运动和简谐振动	1 分
(2)	(a) 固有频率 $\omega=\underline{\sqrt{2}}$ s^{-1} 和 周期 $T=\underline{\sqrt{2}\pi}$ s.	2+2 分
	(b) 绳索的弹性力 $F=\underline{Kx}$ 和弹性势能 $E_p=\underline{\frac{1}{2}Kx^2}$.	1+1 分
(3)	跳跃者在第一次达到瞬时静止前	
	(a) 落下的距离 $X=L+\frac{Mg}{K}+\sqrt{(L+\frac{Mg}{K})^2-L^2}=L+\frac{Mg}{K}+\sqrt{\frac{Mg}{K}(\frac{Mg}{K}+2L)}$ $=\underline{71.79}$ m.	3+4 分
	(b) 跳跃者落下过程中所达到的最大速率 $V=\sqrt{2gL+\frac{Mg^2}{K}}$ $=\underline{30.82}$ m/s.	3+4 分
	(c) 跳跃者落下过程中所所经历的时间=自由落体运动时间+简谐振动时间 $=\underline{3}$ s + 1.27 s = $\underline{4.27}$ s.	3+4 分

【详细解答】

(1) 选项 C，即跳跃者在下落的过程中涉及自由落体运动和简谐振动.

(2) 已知 M=75kg, L=45m 和 K=150N/m

(a) 简谐振动的固有频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{M}}=\underline{\sqrt{2}}$ /s 和周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\underline{\sqrt{2}\pi}$ s;

(b) 弹性力 $F=Kx$ 和绳索弹性势能 $E_p=\dfrac{1}{2}Kx^2$.

(3)

(a) 由机械能守恒定律,在落下过程中失去的重力势能等于储藏于绳子的应变能(弹性势能) 之时，跳跃者瞬时静止即 $MgX=\dfrac{1}{2}K(X-L)^2$ 则有 $2\dfrac{Mg}{K}X=(X-L)^2$ 解得

$$X=L+\frac{Mg}{K}+\sqrt{(L+\frac{Mg}{K})^2-L^2}\ \text{或}\ L+\frac{Mg}{K}+\sqrt{(\frac{Mg}{K})^2+2\frac{MgL}{K}}\ \text{或}\ L+\frac{Mg}{K}+\sqrt{\frac{Mg}{K}(\frac{Mg}{K}+2L)}.$$

已知条件代入上式得到

$$X=45+\frac{75\times10}{150}+\sqrt{(45+\frac{75\times10}{150})^2-45^2}=50+\sqrt{50^2-45^2}=\underline{71.79}45\text{m}.$$

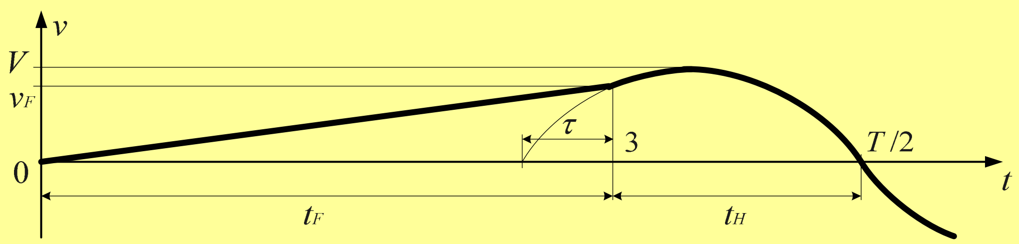
(b) 当加速度为零时，跳跃者达到最大速度 V.

此时绳伸长为 x 其重量与绳子的弹性力相等即 $Mg=kx$. 由机械能守恒定律

$$Mg(L+x)=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow V^2=2g(L+x)-\frac{Kx^2}{M}=2g(L+\frac{Mg}{K})-\frac{k}{M}(\frac{Mg}{K})^2=2gL+\frac{Mg^2}{K}$$

$\Rightarrow$ 跳跃者落下过程中所达到的最大速率 $V=\sqrt{2gL+\dfrac{Mg^2}{K}}=\sqrt{2\times10\times45+\dfrac{75\times10^2}{150}}=\sqrt{950}=\underline{30.82}2$m/s.

(c) 跳跃者落下过程所经历的时间 t=自由落体运动时间 t_F+简谐运动时间 t_H，其中 $t_F=\sqrt{\dfrac{2L}{g}}=\underline{3}$s.



跳跃者以自由落体运动末速度 $v_F=\sqrt{2gL}$=30m/s 进入固有频率 $\omega=\sqrt{2}$ /s 和周期 $T=\sqrt{2}\pi$ s 的简谐运动.

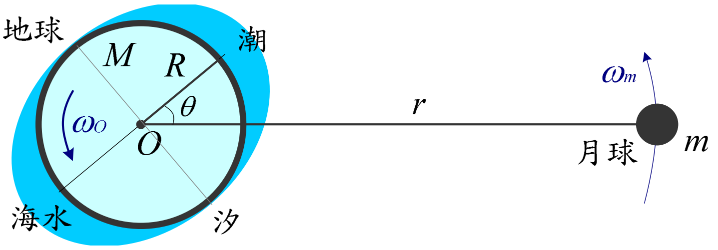
$V\sin\omega\tau=\sqrt{2gL}$ $\Rightarrow\sqrt{950}\sin\omega\tau$=30m/s $\Rightarrow\sin(\sqrt{2}\,\tau)=\dfrac{30}{\sqrt{950}}$=0.97333 $\Rightarrow\sqrt{2}\,\tau$=1.66932 $\Rightarrow\tau$=0.947047s.

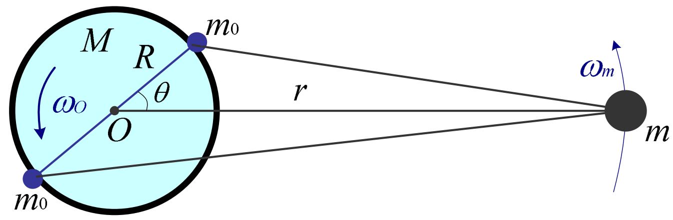
上图中速度 v=0 时跳跃者到达落下过程的最低点 $t_H=\dfrac{T}{2}-\tau=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}-\tau$ = 1.2744 s.

跳跃者落下过程中所经历的时间 $t=t_F+t_H$ =3+1.2744 = $\underline{4.27}$44 s.

第 III 部分 地球和月亮系统 The Earth-Moon System (40 分)

(1) (3分)设行星质量为M，质量为m的卫星在半径为r 的圆形轨道上绕行星运行，圆周运动的角频率为ω和周期为T，试分别写出描述以下两对物理量关系的精准表达式：(a) ω和T；(b) r和ω。





(2) (3分)潮汐是天体之间万有引力在其各个部位的差异而引起天体形变的一种现象。它对天体的影响，包括月亮与地球的距离增大、地球自转变慢、……等等。为研究潮汐现象，我们做出如下假设：

(i) 地月系统视月球为质点并且其围绕地球的旋转(即公转)是一个圆形轨道，地球自转轴垂直于月球的公转平面；不考虑太阳的影响。**(ii)** 系统所有转动惯量、力矩和动量矩的计算都关于地球中心的自转轴而不是系统的质量中心。**(iii)** 系统的角动量L仅是地球绕自身轴转动角动量L_O和月球关于地球轴公转角动量L_m的总和，即$L=L_0+L_m$。**(iv)**月球引力引起地球潮汐；假设涨潮线与地月系统的夹角为θ ，$\theta\neq0$时对月球产生的力矩，把角动量由地球的自转，转移至月球的公转。

设万有引力常量$G=6.7\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}、地球半径$R=6.4\times10^6$m和自转周期$T_O=24\times60^2$ s；月球公转的轨道半径(即地月距离) $r=3.8\times10^8$m；并且已知如下：

天体	运动类形	质量/ kg	角频率/ rad s^{-1}	转动惯量/ kg m^2	角动量/ kg m^2 s^{-1}
行星：地球	自转	$M=6.0\times10^{24}$	$\omega_O=2\pi/T_O=7.2722\times10^{-5}$	$I_O=8.0\times10^{37}$	$L_O=I_O\omega_O$
卫星：月球	公转	$m=7.3\times10^{22}$	$\omega_m=2.7\times10^{-6}$	$I_m=mr^2$	$L_m=I_m\omega_m=(mr^2)\omega_m$

试计算下列角动量：(a) 地球自转L_O, (b) 月球公转L_m; (c) 地月系统L。

(3) (12分)引入潮涨线两端的点质量m_0来近似地描述潮汐现象，点质量引起潮汐力矩。试分别导出

(a) 月球对于近端和远程的点质量m_0产生的万有引力F_c和F_f；

(b) 万有引力F_c和F_f 到地球中心O的距离d_c和d_f。(以上均以常量G,R和参量m,m_0,r,θ 表示)

(c) 近端和远程的点质量m_0在月球上产生的合力矩$\Delta\tau$; [若有需要,可使用近似公式$(1\pm x)^k=1\pm kx$ 如果$x<<1$]

(d) 设点质量$m_0=3.6\times10^{16}$kg和$\theta=3^0$，计算潮汐力矩$\Delta\tau$。(精确到小数点后二位有效数字)

(4) (10分)地球把潮汐力矩转移到月球，地月距离r 会随时间而缓慢增加Δr。试

(a) 由力矩的定义公式$\tau=\dfrac{dL}{dt}=I\dfrac{d\omega}{dt}$，导出地月距离 r的年度增加量Δr公式; (以常量G,M和参量m,r,τ表示)

(b) 取年度为一年即$\Delta t=365$天，计算增加量Δr。

(5) (12分)与角动量守恒相反，地月系统能量E=地球自转动能E_{kO}+月球公转动能E_{km}+万有引力势能E_p，不守恒。试导出 (a) 地月系统以参量G,M,m,r,I_O,ω_0表示的能量E公式;

(b) 以$\Delta\omega_0$和Δr表示的能量变化量ΔE公式；并且使用题(4)的计算结果，计算能量变化量ΔE的数值。

【答案】

(1)	(a) $2\pi=\underline{\omega T}$； (b) $GM=\underline{r^3\omega^2}$.	1+2分
(2)	(a) $L_O=\underline{0.58}\times10^{34}$ kg m²/s, (b) $L_m=\underline{2.85}\times10^{34}$ kg m²/s; (c) $L=\underline{3.43}\times10^{34}$ kg·m²/s.	1+1 +1 分
(3)	(a) $F_c=\underline{\dfrac{Gmm_0}{r^2+R^2-2rR\cos\theta}}$ 和 $F_f=\underline{\dfrac{Gmm_0}{r^2+R^2+2rR\cos\theta}}$. (b) $d_c=\underline{\dfrac{rR\sin\theta}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}}$ 和 $d_f=\underline{\dfrac{rR\sin\theta}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}}}$. (c) 合力矩$\Delta\tau=\underline{\dfrac{3Gmm_0R^2\sin2\theta}{r^3}}$ ； (d) 潮汐力矩$\Delta\tau=\underline{4.12}\times10^{16}$ N·m.	3 分 3 分 3+3 分
(4)	地月距离r的年度增加量$\Delta r=\underline{\dfrac{2\tau}{m}\sqrt{\dfrac{r}{GM}}}\Delta t=\underline{3.46}\times10^{-2}$ m.	5+5 分
(5)	(a) 地月系统的能量$E=\underline{\dfrac{1}{2}I_O\omega_O^2+\dfrac{1}{2}(mr^2)\omega_m^2-\dfrac{GMm}{r}}=\dfrac{1}{2}I_O\omega_O^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}$. (b) 能量变化(减少)量$\Delta E=(\underline{I_O\omega_O})\Delta\omega_O+\underline{\dfrac{GMm}{2r^2}}\Delta r=-\underline{9.10}\times10^{19}$ J.	3 分 4+5 分

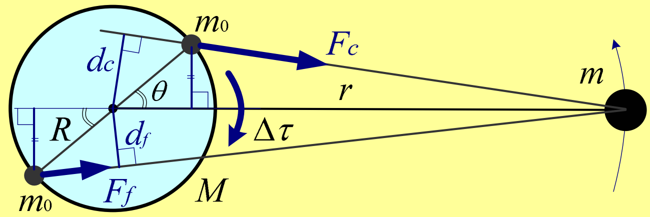
【详细解答】

(1) (a) $2\pi=\omega T$; (b) 由开普勒第三定律$GM=r^3\omega^2$.

(2) (a) 角动量(a)地球自转$L_O=I_O\omega_O=0.5818\times10^{34}$ kg m²/s,

(b)月球公转$L_m=(mr^2)\omega_m=2.846\times10^{34}$ kg m²/s, 则有(c)地月系统$L=L_0+L_m=3.428\times10^{34}$ kg·m²/s.

(3)



(a) 设$c=\dfrac{R}{r}=\dfrac{6.4\times10^6}{3.8\times10^8}=1.68421\times10^{-2}<<1$，可使用近似公式 $(1\pm c)^k=1\pm kc$.

(i) 近端点质量m_0在月球上产生的力$F_c=\dfrac{Gmm_0}{r^2+R^2-2rR\cos\theta}=\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{Gmm_0}{1+c^2-2c\cos\theta}$，

远程点质量m_0在月球上产生的力$F_f=\dfrac{Gmm_0}{r^2+R^2+2rR\cos\theta}=\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{Gmm_0}{1+c^2+2c\cos\theta}$.

(ii) 万有引力F_c到地球中心O的矩离$d_c=\dfrac{r(R\sin\theta)}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}=\dfrac{R\sin\theta}{(1+c^2-2c\cos\theta)^{1/2}}$，

万有引力F_f 到地球中心O的矩离$d_f=\dfrac{r(R\sin\theta)}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}}=\dfrac{R\sin\theta}{(1+c^2+2c\cos\theta)^{1/2}}$.

(b) 合力矩(潮汐力矩)$\Delta\tau=F_c\cdot d_c-F_f d_f=\dfrac{Gmm_0R\sin\theta}{r^2}\cdot[\dfrac{1}{(1+c^2-2c\cos\theta)^{3/2}}-\dfrac{1}{(1+c^2+2c\cos\theta)^{3/2}}]$

$\approx\dfrac{Gmm_0R\sin\theta}{r^2}\cdot[\dfrac{1}{(1-2c\cos\theta)^{3/2}}-\dfrac{1}{(1+2c\cos\theta)^{3/2}}]\approx\dfrac{Gmm_0R\sin\theta}{r^2}\cdot(\dfrac{1}{1-3c\cos\theta}-\dfrac{1}{1+3c\cos\theta})$

$=\dfrac{Gmm_0R\sin\theta}{r^2}\cdot\dfrac{(1+3c\cos\theta)-(1-3c\cos\theta)}{(1-3c\cos\theta)(1+3c\cos\theta)}\approx\dfrac{Gmm_0R\sin\theta(6c\cos\theta)}{r^2}=\dfrac{3Gmm_0cR\sin2\theta}{r^2}=\dfrac{3Gmm_0R^2\sin2\theta}{r^3}$.

(c) 潮汐力矩$\Delta\tau=\dfrac{3\times(6.7\times10^{-11})\times(7.3\times10^{22})\times(3.6\times10^{16})\times(6.4\times10^{6})^2\sin(2\times3^0)}{(3.8\times10^8)^3}=\underline{4.12}2\times10^{16}$ N·m.

(4)

(a) 由(1b)式$GM=r^3\omega^2$,月球关于地球公转的角频率$\omega_m=\sqrt{\dfrac{GM}{r^3}}$ 及其角动量$L_m=(mr^2)\omega_m=m\sqrt{GMr}$.

潮汐力矩作用于月球$\tau=\dfrac{dL_m}{dt}=\dfrac{\Delta(m\sqrt{GMr})}{\Delta t}=m\sqrt{GM}\cdot\dfrac{\Delta\sqrt{r}}{\Delta t}=\dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{GM}{r}}\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ 增加量$\Delta r=\underline{\dfrac{2\tau}{m}\sqrt{\dfrac{r}{GM}}\Delta t}$.

取Δt=1年=365×24×60×60=3.1536×10^{7}s 有$\Delta r=\dfrac{2\times4.122\times10^{16}}{7.3\times10^{22}}\sqrt{\dfrac{3.8\times10^8}{6.7\times10^{-11}\times6\times10^{24}}}\times3.1536\times10^7$

= (1.129 315×10^{-6})×(0.972 252×10^{-3})×(3.153 6×10^7) =$\underline{3.46}$26 ×10^{-2}m (增加).

(参考資料) 潮汐力矩作用于地球$\tau=-I_O\dfrac{\Delta\omega_O}{\Delta t}$

$\Rightarrow$ 角频率$\Delta\omega_O=-\dfrac{\tau}{I_O}\Delta t=\dfrac{4.1216\times10^{16}\times3.1536\times10^7}{8\times10^{37}}=-1.625\times10^{-14}$/s (减小).

由(1a)式$\omega_O T_O=2\pi$.$\Rightarrow$ 微分运算$\Delta(\omega_O T_O)=T_O(\Delta\omega_O)+\omega_O(\Delta T_O)=0\Rightarrow\dfrac{\Delta T_O}{T_O}+\dfrac{\Delta\omega_O}{\omega_O}=0$.

对于每年的日时间长度T_O=86,400s,

日时间变化(增加)量$\Delta T_O=-\dfrac{\Delta\omega_O}{\omega_O}T_O=-\dfrac{-1.625\times10^{-14}}{7.2722\times10^{-5}}\times86{,}400=1.930\ 64\times10^{-5}$s.

(5)

(a) 能量$E=(\dfrac{1}{2}I_O\omega_O{}^2+\dfrac{1}{2}I_m\omega_m{}^2)-\dfrac{GMm}{r}=\dfrac{1}{2}I_O\omega_O{}^2+\dfrac{1}{2}(mr^2)\omega_m{}^2-\dfrac{GMm}{r}$.

使用$r^3\omega_m{}^2=GM$ 有$E=\dfrac{1}{2}I_O\omega_O{}^2+\dfrac{1}{2}m(\dfrac{r^3\omega_m{}^2}{r})-\dfrac{GMm}{r}=\dfrac{1}{2}I_O\omega_O{}^2+\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}-\dfrac{GMm}{r}=\dfrac{1}{2}I_O\omega_O{}^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r}$.

(b) 使用题(4)的计算结果有

能量变化(减少)量$\Delta E=\Delta(\dfrac{1}{2}I_O\omega_O{}^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{GMm}{r})=(I_O\omega_O)\Delta\omega_O+\dfrac{GMm}{2r^2}\Delta r$

$=(8\times10^{37})\times7.2722\times10^{-5})\times(-1.625\times10^{-14})+\dfrac{(6.7\times10^{-11})(6\times10^{24})(7.3\times10^{22})}{2\times(3.8\times10^8)^2}\times(3.462\ 6\times10^{-2})$

$=-\underline{9.10}2\times10^{19}$ J.